שיעורי בית 2

30 באוקטובר 2015

1. תהא G חבורה בה מתקיים $\forall g_1, g_2 \in G : (g_1 g_2)^2 = g_1^2 g_2^2$.
הוכח כי G חבורה חילופית.

2. הוכח: תהא G חבורה. אזי המרכז שלה $Z(G)$ ג"כ חבורה (ביחס לאותה פעולה של G)

3. הגדרה: הסימן של תמורה $\sigma \in S_n$ הוא $(-1)^{\#\{(i,j):\, i<j \wedge \sigma(i)>\sigma(j)\}}$.
משפט: הסימן של תמורה שווה גם ל $(-1)^k$ כאשר k הוא מספר החילופים המופיעים בהצגת התמורה כמכפלה של חילופים (וזה לא תלוי בהצגה).
למשל הסימן של $(1,3,5,6) = (1,3)(3,5)(5,6)$ הוא $-1 = (-1)^3$. הסימן של תמורה הזהות הוא $1 = (-1)^0$
הסימן של $(1,2,3) = (1,2)(2,3)$ הוא $1 = (-1)^2$.
הגדרה: תמורה שסימנה 1 נקראת תמורה זוגית. תמורה שסימנה 1- נקראת תמורה אי־זוגית. קבוצת התמורות הזוגיות מסומנת כ A_n והיא חבורה ביחס להרכבה.

(א) הוכח כי התמורות האי־זוגיות אינן חבורה (ביחס להרכבה) עבור $n > 2$.

(ב) כמה איברים יש ב A_n ($n > 1$)?
רמז: הראו כי ב A_n יש אותו מספר איברים כמו ב $S_n \setminus A_n$ (התמורות האי זוגיות) ע"י מציאת פונקציה חח"ע ועל (שזה שקול לכך שהיא הפיכה) $f : S_n \setminus A_n \to A_n$. בנוסף, שימו לב כי כי $S_n = (S_n \setminus A_n) \cup A_n$

(ג) כתוב מפורשות את A_2, A_3.

(ד) מצא את המרכז של $(1,2,3) = (1,2)(2,3) = \sigma$ ב A_5 מפורשות (כלומר, כתוב את כל האיברים במרכז)

(ה) הוכח כי המרכז של A_n , כלומר $C(A_n)$ שווה ל $\{id\}$ = $C(A_n)$ עבור $n \geq 4$