1 נעזר בנוסחת קושי הדמר, $R^{-1}=\limsup\sqrt[n]{|a_n|}$

א. רדיוס ההתכנסות מקיים $R^{-1}=\limsup\sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}=1\Rightarrow R=1$, והמרכז הוא בנקודה $-i$. על שפת העיגול נוכל לרשום $z+i=e^{i\theta}$ עבור θ ממשי. ואז הטור בערכים מוחלטים הוא $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{e^{in\theta}}{(n+1)(n+2)}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ שמתכנס. מכאן שעל השפה יש התכנסות בהחלט, ובפרט התכנסות. לסיכום, תחום ההתכנסות הוא $\{z\in\mathbb{C}:|z+i|\le 1\}$.

ב. נציב $w=\frac{z+1}{z-1}$ בטור, ונקבל $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 3^n}w^n$. במונחים של w רדיוס ההתכנסות מקיים $R^{-1}=\limsup\sqrt[n]{\frac{1}{n^2 3^n}}=\frac{1}{3}\Rightarrow R=3$. גם כאן ניתן לבדוק ולראות שיש התכנסות (בהחלט) על השפה. ולכן תחום ההתכנסות הוא $\{|w|\le 3\}$. נפשט קצת את תחום ההתכנסות:

$$|w|\le 3\Leftrightarrow\left|\frac{z+1}{z-1}\right|\le 3\Leftrightarrow\left|\frac{z+1}{z-1}\right|^2\le 9\Leftrightarrow|z+1|^2\le 9|z-1|^2\Leftrightarrow|z|^2+2\operatorname{Re}z+1\le 9|z|^2-18\operatorname{Re}z+9$$

$$\Leftrightarrow 8|z|^2-20\operatorname{Re}z+8\ge 0\Leftrightarrow 8x^2+8y^2-20x+8\ge 0\Leftrightarrow 8\left(x-\frac{20}{16}\right)^2-8\left(\frac{20}{16}\right)^2+8y^2+8\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+y^2\ge\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

מדובר במשלים של העיגול הפתוח, שמרכזו בנקודה $\left(\frac{5}{4},0\right)$ ורדיוסו באורך $\frac{3}{4}$ יחידות.

ג. נחלק למקרים:

1) $|z|>1$: במקרה זה האיבר הכללי של הטור, בערך מוחלט הוא

$$\left|\frac{1-z^n}{1+z^n}\right| \geq \frac{\left|1-|z|^n\right|}{1+|z|^n} = \frac{|z|^n-1}{1+|z|^n} \to 1 \neq 0$$ ולכן אין התכנסות (ע"פ התנאי ההכרחי להתכנסות טורים).

השתמשנו כאן באי שווין המשולש במכנה, ובי שוויון המשולש ההפוך במונה.

2) $|z|<1$: במקרה זה האיבר הכללי של הטור בערך מוחלט הוא

$$\left|\frac{1-z^n}{1+z^n}\right| \geq \frac{\left|1-|z|^n\right|}{1+|z|^n} = \frac{1-|z|^n}{1+|z|^n} \to 1 \neq 0$$ ושוב אין התכנסות.

ד. נציב $w=z^3-i$ ונקבל $\sum_{n=0}^{\infty} n!w^n$. במונחים של w רדיוס ההתכנסות הוא אפס. ולכן יש התכנסות עבור $z^3=i \Leftrightarrow z^3-i=0 \Leftrightarrow w=0 \Leftrightarrow |w|=0$. כלומר התכנסות בשלוש נקודות בלבד,

$$z_1=-i, z_{2,3}=\frac{\pm\sqrt{3}+i}{2}$$

2. א) $z^2\sin z$ סביב $z=0$. היות שידוע ש

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ברור שהטור שאנחנו מחפשים הוא

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+3}}{(2n+1)!}$$

ב) נציב $w=z-\frac{\pi}{2}$ כדי שהפיתוח יהיה סביב 0. הפונקציה הופכת להיות

$$\begin{aligned}(w+\frac{\pi}{2})^2\sin(w+\frac{\pi}{2}) &= (w+\frac{\pi}{2})^2\cos(w)\\ &= w^2\cos(w)+\pi w\cos w+\frac{\pi^2}{4}\cos w\end{aligned}$$

היות שהפיתוח של $\cos w$ הוא

$$\cos w=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{w^{2n}}{(2n)!}$$

נקבל שהטור המבוקש הוא

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{w^{2n+2}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\pi\frac{w^{2n+1}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^2}{4}\frac{w^{2n}}{(2n)!}$$

כלומר

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{w^{2n}}{(2n-2)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\pi\frac{w^{2n+1}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^2}{4}\frac{w^{2n}}{(2n)!}$$

כלומר הטור הוא

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$$

כאשר

$$a_k=\begin{cases}\frac{\pi(-1)^n}{(2n)!} & k=2n+1\\ (-1)^n(\frac{\pi^2}{4(2n)!}-\frac{1}{(2n-2)!}) & k=2n \quad k\neq 0\\ \frac{\pi^2}{4} & k=0\end{cases}$$

ג. נשים לב ש

$$\frac{1}{9+z^4}=\frac{1}{9}\frac{1}{1-(-(\frac{z}{\sqrt{3}})^4)}=\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{z}{\sqrt{3}}^4)^n=\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\sqrt{3})^n}z^{4n}$$

ולכן הטור שלנו הוא

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{9(\sqrt{3})^n} z^{4n+1}$$

3. נסמן את רדיוס ההתכנסות ב R. היות ש $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אנחנו יודעים ש $\sum a_n z^n$ מתכנס עבור $z = 1$ ולכן רדיוס ההתכנסות הוא לפחות 1. מצד שני רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum |a_n| z^n$ הוא גם R והטור הזה דווקא מתבדר עבור $z = 1$ כלומר $R \leq 1$ ולכן לסיכום $R = 1$.

4.

א. לפי נוסחת קושי הדמר טריוויאלי לראות שרדיוס ההתכנסות הוא

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = 1$$

כמו כן, עבור נקודות z שבהן $|z| = 1$ קל לראות שהטור מתבדר כי הסדרה של הטור לא מתכנסת ל0. לסיכום תחום ההתכנסות הוא

$$\{z \mid |z| < 1\}$$

ב. הפרינציפ הוא כמובן לשים לב שיש כאן פחות או יותר נגזרת שניה של הטור ההנדסי הרגיל $\sum z^n$. ליתר דיוק, לפי גזירה איבר איבר מקבלים

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)z^n &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)z^n = z\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)z^{n-1} \\
&= z\sum_{n=1}^{\infty}((n+1)z^n)' = z\sum_{n=1}^{\infty}(z^{n+1})'' = \\
&= z(\sum_{n=1}^{\infty} z^{n+1})'' = z(\frac{z^2}{1-z})'' = z(\frac{2z-z^2}{(1-z)^2})' \\
&= -z(1 - \frac{1}{(z-1)^2})' = -z(\frac{2}{(z-1)^3}) = \frac{-2z}{(z-1)^3}
\end{aligned}$$

5. $f(z)$ שלמה ולכן יש לה פיתוח לטור טיילור בכל $\mathbb{C}$. שני האיברים הראשונים בטור טיילור הם 0 (כי $f(0) = f'(0) = 0$) כלומר

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

אז אם נגדיר

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z^2} & z \neq 0 \\ \frac{f^{(2)}(0)}{2} = \frac{1}{2} & z = 0 \end{cases}$$

אז $g(z)$ תהיה גם כן שלמה. נשים לב שלפי הנתון, לכל z כך ש $|z| \geq 10$ מתקיים ש $|g(z)| \leq 1$ כלומר $g(z)$ חסומה ב $\{z \mid |z| \geq 10\}$ אבל בוודאי ש $g(z)$ חסומה גם ב

$\{z \mid |z| \leq 10\}$ (היא רציפה וזה תחום סגור וחסום). ולכן בסה"כ $g(z)$ חסומה. לפי משפט ליוביל $g(z)$ קבועה כלומר

$$g(z) = g(0) = \frac{1}{2}$$

ולכן

$$f(z) = \frac{1}{2}z^2$$

היא הפונקציה היחידה שמקיימת את הדרישות הנ"ל.

6. נזכור שאם f שלמה אז בוודאי שf'' שלמה. לכן, לפי משפט היחידות

$$f''(z) + f(z) = 0$$

זאת משוואה דיפרנציאלית שפתרונה:

$$f(z) = c_1 e^{iz} + c_2 e^{-iz}$$

7. צריך כאן קצת זהירות עם התחומים. נגדיר $D = \{z \mid |z| < 1\}$. (שהיא פתוחה, בשונה מהתחום המקורי שלנו). נגדיר

$$E_i = \{z \mid |z| \leq \frac{1}{2} \text{ and } f_i(z) = 0\}$$

לפי הנתון, ברור ש

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \{z \mid |z| \leq \frac{1}{2}\}$$

ולכן לפחות אחת מבין קבוצות אלו היא אינסופית. בלי הגבלת כלליות E_1 היא אינסופית. E_1 היא קבוצה אינסופית וחסומה, ולכן לפי בולצאנו ויירשטראס יש לה נקודת הצטברות, נניח p. ברור ש $p \in D$ (למעשה $p \in \{z \mid |z| \leq \frac{1}{2}\}$ כי זאת קבוצה סגורה) וגם $E_1 \subseteq D$ ו D קבוצה פתוחה. אז בעצם f_1 מתאפסת על E_1 שהיא קבוצה ב D עם נקודת הצטברות ב D ולכן

$$f_1(z) = 0 \quad \forall z \in D$$

(הערה: כל הבלאגן למעלה בא כדי שיהיו לנו בדיוק התנאים הדרושים למשפט היחידות, נשים לב שצריך ש f תהיה מוגדרת על תחום (A אינו תחום) ושנקודת ההצטברות תהיה בD (והרי D קבוצה פתוחה ולכן לא מכילה כל נקודת הצטברות שלה) ובגלל זה היינו זהירים קצת עם הבניה שלנו.)
בזה עוד לא סיימנו את התרגיל כי צריך להוכיח

$$f_1(z) = 0 \quad \forall z \in A$$

אבל זה נובע מייד מרציפות f.

8.אנחנו רוצים כמובן להשתמש במשפט היחידות. נסמן $z = 1 - \frac{1}{n}$, כלומר $n = \frac{1}{1-z}$ ונציב זאת באגף ימין:

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} = (1-z)^2 - (1-z) = 1 - 2z + z^2 - 1 + z = z^2 - z$$

כלומר,אם נגדיר $g(z)=z^2-z$ אז יתקיים שלכל $n\in\mathbb{N}$

$$f(1-\frac{1}{n})=g(1-\frac{1}{n})$$

ולכן לפי משפט היחידות

$$f(z)=z^2-z$$

בכל התחום המדובר.

9. נניח ש $f(z)$ פונקציה שלמה כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$|f(\frac{1}{n})|\le\frac{1}{n^n}$$

הוכיחו ש $f(z)=0$. רמז: הוכיחו כי $z=0$ הוא אפס ומצאו את הסדר שלו.
ראשית נשים לב שמרציפות f ברור ש

$$|f(0)|=|f\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\le\lim_{n\to\infty}|f(\frac{1}{n})|\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^n}=0$$

כלומר $f(0)=0$ כלומר $z=0$ הוא אפס. נניח שהוא אפס מסדר k, כלומר

$$f(z)=z^kg(z)$$

כאשר $g(z)$ אנליטית ו $g(0)\neq 0$. אבל אז

$$|g(0)|=|g(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n})|=\lim_{n\to\infty}|g(\frac{1}{n})|=\lim_{n\to\infty}\frac{|f(\frac{1}{n})|}{\frac{1}{n^k}}\le\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^n}=0$$

בסתירה. ולכן $z=0$ הוא אפס מסדר אינסוף ולכן $f(z)=0$ כי לפונקציה אנליטית שאינה 0 אין אפסים מסדר אינסוף.