מבנים דיסקרטיים – תרגול 1

תמורות

נזכיר שתמורה היא פונקציה חח"ע ועל $\pi:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}$. ישנן $n!$ תמורות.

נסמן את קבוצת התמורות על המספרים $\{1,\dots,n\}$ ב S_n.

דוגמא:

דרך סטנדרטית לכתוב תמורות היא בצורה הבאה:

$$x=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

x היא התמורה שמעבירה את 1 ל3 את 2 ל2 ואת 3 ל1. כל תמורה לוקחת את n האיברים ומסדרת אותם בסדר כלשהו.

הרכבת/הכפלת תמורות

מה זה הרכבת תמורות? מתייחסים לתמורות כפונקציות, ומבצעים הרכבה.

נסביר ע"י דוגמא ב S_4:

איך מחשבים? כמו בהרכבת פונקציות שמים את התמורות אחת ליד השניה:

$$x=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix},\qquad y=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}$$
$$xy=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$$

ואז מתחילים לחשב מימין לשמאל ובודקים מה הטווח של כל מספר מ1 עד 4:

1 הולך ל4 ו 4 הולך ל4 לכן סך הכול 1 הולך ל 4.

2 הולך ל2 ואז 2 הולך ל1 אז סך הכול 2 הולך ל 1.

3 הולך ל3 שהולך 3 סך הכל 3 הולך ל 3.

4 הולך ל1 ו1 הולך 2 אז סך הכל 4 הולך ל 2.

יש לשים לב שהחלפת סדר הכפל נותן לרוב תוצאה **שונה**

$$x=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}$$
$$xy=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},\quad yx=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$$

<u>תמורת הזהות:</u>

$$id=\begin{pmatrix}1&\dots&n\\1&\dots&n\end{pmatrix}.$$

<u>איך מוצאים תמורה הפכית?</u>

כיוון שתמורה היא פונקציה חח"ע ועל, היא הפיכה, כלומר לכל $x\in S_n$ קיים $y\in S_n$ כך ש $xy=yx=id$.

בהנתן $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$ צריך להחליף בין השורות, ואז לסדר מחדש:

$$x^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$$

<u>פירוק תמורה למחזורים זרים:</u>

מחזור הוא תמורה הנכתבת בצורה (1,2,3) כלומר 1 עובר ל 2, 2 עובר ל 3 וגם 3 עובר ל 1.

כל תמורה אפשר לכתוב כפירוק למחזורים זרים. נסביר איך עושים זאת בעזרת דוגמאות:

1. $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\end{pmatrix}$

הסבר: מתחילים לקרוא את המחזור משמאל לימין:1 הולך ל2, 2 הולך ל3 , 3 הולך ל4 ו4 הולך ל1(באופן מחזורי).

2. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&2&6&4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&6&5\end{pmatrix}$

הסבר: מתחילים משמאל לימין: 2 הולך ל3 ו3 ל2 לכן הם במחזור אחד, 4 הולך ל6 ו6 הולך ל 5 ו5 הולך 4. את 1 אנו לא מוסיפים כי 1 הולך לעצמו.

3. מקובל להסיר מחזורים מאורך 1, ולכתוב בכתיב חסר: $(1,2)(3)=(1,2)$.
4. איבר היחידה הוא מחזור ריק: $(1)(2)(3)(4)$, ובקיצור רושמים (1).
5. נשים לב **שמחזורים זרים** מתחלפים: $(1,2,3)(4,5)=(4,5)(1,2,3)$.
6. ניתן לכפול מחזורים כמו שכופלים תמורות. לדוגמא

$$(123)(12)=(13)(2)$$

בכפל משמאל 1 עובר ל 2 ואז 2 עובר ל 3, ולכן בתמורה המתקבלת 1 עובר ל 3.

<u>הערה:</u> שימו לב שניתן "לסובב" מחזור: כלומר $(123)=(231)=(312)$.

<u>תרגיל:</u> כמה דרכים שונות יש לכתוב אותו מחזור?

פתרון: n

<u>משפט:</u> כל תמורה ב S_n אפשר לפרק למכפלת מחזורים זרים. פירוק זה יחיד עד כדי סדר המחזורים, ו"סיבוב" האיברים בכל מחזור.

<u>דוגמא:</u> איך מוצאים את ההפכי של מחזור? פשוט "הופכים" את המחזור:

$(1\ \ 2\ \ 3)^{-1}=(3\ \ 2\ \ 1)$.

<u>תרגיל (בקומבינטוריקה):</u> כמה מחזורים שונים באורך k יש ב S_n?

<u>תשובה:</u> כמספר הדרכים לבחור k מתוך n אנשים ולהושיב במעגל. סה"כ: $\binom{n}{k}(k-1)!$.

<u>הגדרה:</u> **חילוף** הוא מחזור באורך 2.

<u>דוגמא:</u> כל מחזור ב- S_n אפשר להציג כמכפלה של חילופים למשל:

$$(a_1\ a_2\quad a_3\quad \dots\quad a_k)=(a_1\quad a_k)(a_1\quad a_{k-1})\cdots(a_1\quad a_2)$$

$$(1\quad 5\quad 4\quad 3\quad 2)=(1\quad 2)(1\quad 3)(1\quad 4)(1\quad 5)$$

(גם תמורה כללית אפשר לפרק לחילופים: קודם מפרקים את התמורה למחזורים זרים, ואז מפרקים כל מחזור זר לחילופים.)