תרגיל בית 4 – טופולוגיה

שאלה 1

א. הוכיחו את הטענה הבאה: A סגורה $\Leftrightarrow$ $A' \subseteq A$.

ב. מצאו את נקודות ההצטברות של תת הקבוצות הבאות של המרחב המטרי $\mathbb{R}$:

1. $\mathbb{Q}$,
2. $(0,1)$.

שאלה 2

יהי X מ"מ ותהי $S \subseteq X$ תת קבוצה ו- $x \in S$. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

א. $x \in S - S'$ (הפרש קבוצות).

ב. קיים $\varepsilon > 0$ כך ש- $B(x,\varepsilon) \bigcap S = \{x\}$.

ג. לכל סדרה $\{x_n\} \subseteq S$, אם $x_n \to x$ אזי $\{x_n\}$ קבועה לבסוף.

שאלה 3

א. יהי X מ"מ שלם ותהי A תת קבוצה סגורה של X. הוכיחו ש- A תת מרחב מטרי שלם.

ב. יהי X מ"מ ו- $A \subseteq X$ תת מרחב מטרי שלם של X. הראו ש- A תת קבוצה סגורה של X.

שאלה 4

נסמן ב- A' את אוסף נקודות ההצטברות של A; נסמן ב- A'' את אוסף נקודות ההצטברות של A' וכן הלאה.

יהי (X,d) מ"מ, תהי $\{x_n\}$ סדרה שכל איבריה שונים המתכנסת ל- $x \in X$.
תהי $A = \{x_n\}$.

א. מצאו את A', A''.

ב. האם A קומפקטי?

ג. האם $A\cup\{x\}$ קומפקטי? נמקו את תשובתכם אך ורק באמצעות הגדרת הקומפקטיות דרך **כיסוים פתוחים**!

<u>שאלה 5</u>

יהי X מ"מ ויהי Y אוסף אינסופי בן מניה של נקודות מתוך X, כך שלכל שתי נקודות שונות $a,b\in Y$ מתקיים $2\geq d(a,b)\geq 1$. הוכיחו:

א. Y סגור וחסום ב- X.
ב. האם Y תת מרחב קומפקטי (ביחס למטריקת תת המרחב)?

<u>שאלה 6</u>

<u>בתרגיל זה תוכיחו כי כל מטריקה שקולה למטריקה חסומה.</u>

יהי (X,d) מ"מ**.** נגדיר שתי מטריקות על X **:** $\tilde{d},\rho$.

$$\rho(x,y)=\min\{d(x,y),1\}\quad,\quad \tilde{d}(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\ \text{לכל}\ x,y\in X\ \mathbf{.}$$

א. (רשות – כי יש את הפתרון בקורס של אינפי' 3) הוכיחו כי אלה אכן מטריקות.
ב. הוכיחו כי המטריקות הן חסומות (את זה אכן עוד לא עשיתם ☺).
<u>הערה</u>: מטריקה ρ נקראת "חסומה" אם קיים $r>0$ כך שלכל x,y מתקיים $\rho(x,y)\leq r$ (שקול להגדרות שניתנו בתרגול האחרון).
ג. הוכיחו כי d, $\tilde{d}$ ו- ρ שקולות.

<u>שאלת אתגר</u> (לא להגשה)

היזכרו במרחב שהגדרנו בתרגיל הראשון:

נסמן ב- X את אוסף כל הסדרות שאיברהן שייכים לקבוצה $\{1,2,\ldots,n\}$. נגדיר את הפונקציה הבאה: $d:X\times X\to[0,\infty)$ על ידי:

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ \dfrac{1}{\min\{j\in\mathbb{N}:x_j\neq y_j\}} & x\neq y\end{cases}.$$

בעבר הוכחתם ש- d היא אכן מטריקה. הוכיחו כעת כי המרחב הוא קומפקטי.

בהצלחה!