תרגיל בית 6 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשע"ח

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות קלות יותר בדרך כלל, אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. מצאו את הסימן של התמורה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 2n & 1 \end{pmatrix} \in S_{2n}$$

שאלות רגילות

שאלה 2. תהי G חבורת-p סופית ותהי $N \lhd G$ לא טריוויאלית. הוכיחו כי $Z(G) \cap N \neq \{e\}$.
רמז: G פועלת על N על ידי הצמדה. העזרו בטיעון דומה לזה שראיתם בהרצאה בהוכחה ש-$Z(G)$ לא טריוויאלית.

שאלה 3. יהי $f: G \to H$ הומומורפיזם. הוכיחו שאם G אבלית, אז $\operatorname{im} f$ אבלית. הסיקו שאם $G \cong H$ אז G אבלית אמ"מ H אבלית.

שאלה 4. עבור כל אחת מן ההעתקות הבאות קבעו והוכיחו האם היא הומומורפיזם, מונומורפיזם, אפימורפיזם או איזומורפיזם.

1. $f: \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ המוגדרת לפי $f(x) = x^2$.
2. $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}_{>0}$ המוגדרת לפי $f(x) = x^4$ כאשר $\mathbb{R}_{>0}$ זו חבורת המספרים הממשיים החיוביים עם כפל רגיל.
3. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ המוגדרת לפי $f(n) = (n \bmod 3,\, n \bmod 6)$.
4. $f: S_6 \to U_7 \times U_{11}$ המוגדרת לפי $f(\sigma) = (\sigma(1), \sigma(2))$.

שאלה 5. יהי p ראשוני, ותהי G חבורה מסדר p^3.

1. הוכיחו שניתן ליצור את G עם תת־קבוצה בת שלושה איברים $a, b, c \in G$ (כלומר $G = \langle a, b, c \rangle$). רמז: משפט לגראנז' כמה וכמה פעמים.
2. בחרו p. תנו דוגמה מפורשת לחבורה G אבלית מסדר p^3 שאפשר ליצור עם שני איברים $a, b \in G$, אבל לא עם איבר אחד.

3. אתגר: הראו שישנה חבורה לא אבלית מסדר p^3 שאפשר ליצור עם שני איברים לפי ההדרכה הבאה: התבוננו בקבוצה (שכבר פגשנו מעל $\mathbb{R}$)

$$H(\mathbb{Z}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

ועל האיברים $b = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), a = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. הראו כי $\left|\left\langle a, aba^{-1}b^{-1} \right\rangle\right| = p^2$, והסיקו מזה ש-$H(\mathbb{Z}_p) = \langle a, b \rangle$.

שאלה 6. בתרגיל הזה נראה שוב שאי אפשר לומר ששתי תמורות הן "צמודות סתם" מבלי לומר באיזו חבורה עובדים.

1. מצאו את מחלקת הצמידות של $A_4 \ni (132)$.

2. תנו דוגמה לשתי תמורות שאינן צמודות ב-A_4, אבל כן צמודות ב-S_4. הוכיחו שהן גם צמודות ב-A_5. רמז: הביטו מעלה.

3. הוכיחו שאם יש זוג תמורות שאינן צמודות ב-A_n, אך כן צמודות ב-S_n, אז הן גם צמודות ב-A_{n+2}.

שאלה 7. תהי G חבורה שבה לכל $x, y \in G$ מתקיים $(xy)^{2018} = x^{2018}y^{2018}$. נסמן שלוש תת־קבוצות

$$\begin{aligned} A &= \left\{ g^{2018} \,\middle|\, g \in G \right\} \\ B &= \left\{ g^{2017} \,\middle|\, g \in G \right\} \\ C &= \left\{ g \,\middle|\, g \in G, g^{2018} = e \right\} \end{aligned}$$

1. הוכיחו $A, B, C \lhd G$. צריך להוכיח שהן תת־חבורות, וגם שהן נורמליות. רמז: כדאי לא לעבוד קשה ולהעזר בהומומורפיזמים.

2. הוכיחו שכל איברי A מתחלפים עם כל איברי B. באופן שקול, הוכיחו שלכל $x, y \in G$ מתקיים $x^{2018}y^{2017} = y^{2017}x^{2018}$.

3. הוכיחו שלכל $g, h \in G$ מתקיים $[g, h]^{2018 \cdot 2017} = e$ כאשר $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$.

שאלות אתגר

אם פתרתם את שאלות האתגר, ואין לשאלה פתרון, בבקשה שלחו לי את הפתרון שלהן.

שאלה 8. יהי p ראשוני. נזכיר כי חבורה נקראת חבורת-p אם הסדר של כל איבר הוא חזקה של p. כמו כן ראינו שלחבורת-p סופית יש מרכז לא טריוויאלי. מצאו חבורת-p עם מרכז טריוויאלי.
הדרכה אפשרית (אם אתם מוצאים חבורות אחרות נשמח לשמוע): התבוננו על קבוצת המטריצות האינסופיות מעל $\mathbb{Z}_p$ מהצורה

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_\infty \end{pmatrix}$$

כאשר I_∞ היא מטריצת יחידה אינסופית, 0 היא מטריצת אפס בגודל מתאים והמטריצה $A \in GL_n(\mathbb{Z}_p)$ היא משולשית עליונה (סופית, עבור n טבעי כלשהו) עם אחדות על האלכסון. הסבירו למה כפל מטריצות עדין מוגדר כאן (זה חשוב שבכל שורה ובכל עמודה יש מספר סופי של איברים לא אפסיים), והסיקו שמתקבלת חבורה. הוכיחו שהסדר של כל איבר הוא חזקה של p וכדי להראות שהמרכז טריוויאלי העזרו בזהויות הבאות על מטריצות בלוקים סופיות:

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & M \\ 0 & I_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$