בוחן - מבוא לתורת החבורות תשע"ז - מועד ב'

משך הבוחן 90 דקות. נא לכתוב שם ותעודת זהות. יש לענות על כל השאלות. משקל כל שאלה 25 נקודות. בשאלות עם שני סעיפים משקל כל סעיף 12.5 נקודות

נמקו היטב תשובותיכם!

שאלה 1 תהיינה H ו K שתי חבורות מסדר סופי. נביט על המכפלה הקרטזית $H \times K$.
הוכיחו כי לכל $(a,b) \in H \times K$ מתקיים:

$$\mathrm{o}((a,b)) = \mathrm{lcm}(\mathrm{o}(a), \mathrm{o}(b))$$

פתרון: הוכחה: נסמן $l = \mathrm{lcm}(\mathrm{o}(a), \mathrm{o}(b))$. ואז בגלל ש $\mathrm{o}(a)$ ו $\mathrm{o}(b)$ שניהם מחלקים את l נקבל ש

$$(a,b)^l = (a^l, b^l) = (e,e)$$

כמו כן, אם n היא איזשהיא חזקה כך ש

$$(a,b)^n = (e,e)$$

זה אומר בעצם ש

$$(a^n, b^n) = (e,e)$$

ולכן

$$\mathrm{o}(a) \mid n, \quad \mathrm{o}(b) \mid n$$

ולכן

$$l \mid n$$

וזה מוכיח ש l היא החזקה m המינימלית עבורה

$$(a,b)^m = e$$

וזה מוכיח את הדרוש.

שאלה 2 נזכור כי $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ היא חבורת המטריצות ההפיכות מסדר 3×3 מעל $\mathbb{R}$. נסמן ב H את החבורה $\{1, -1\}$ עם פעולת הכפל. נסמן ב $\mathbb{R}^*$ את החבורה של האיברים ההפיכים ב $\mathbb{R}$ עפ פעולת כפל. נגדיר פונקציה

$$f : H \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$$

לפי

$$f(c, A) = c|A|$$

א) הוכיחו כי f הוא אפימורפיזם
פתרון: הומומורפיזם:

$$f((c,A)\cdot(d,B)) = f((cd,AB)) = cd|AB| = c|A|d|B| = f(c,a)f(d,B)$$

על: ניקח $x \in \mathbb{R}^*$ וניקח

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אז

$$f(1,A) = 1|A| = x$$

אז f על.

ב) נסמן ב K את הגרעין של f. נסמן

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

מצאו את הקוסט $K(1,A)$ ואת הקוסט $(1,A)K$ (כלומר, איזה איברים נמצאים בקוסטים האלה?)
תוספת הסבר: התשובה צריכה להראות למשל ככה: הקוסט $(1,A)K$ מכיל את כל הזוגות (x,B) המקיימים כי....
פתרון: קודם כל, K היא גרעין של הומומורפיזם ולכן תת חבורה נורמלית ולכן

$$(1,A)K = K(1,A)$$

איבר (c,B) נמצא באותו קוסט עם $(1,A)$ אם

$$f((c,B)) = f((1,A)) = |A| = 24$$

כלומר

$$K(1,A) = \{(c,B) \mid c|B| = 24\}$$

בגלל ש $c \in \{\pm 1\}$ זה אומר ש

$$K(1,A) = \{(c,B) \mid c = 1, |B| = 24 \vee c = -1, |B| = -24\}$$

שאלה 3 (בשאלה זו אין קשר בין הסעיפים)

א) האם קיים איזומורפיזם

$$f : U_{10} \to U_8$$

(כאשר U_n היא חבורת אוילר - חבורת ההפיכים של המונואיד הכפלי $\mathbb{Z}_n$)
פתרון: אין איזומורפיזם כי כבר ראינו שבחבורה U_{10} יש איבר מסדר 4 (למשל 3) ואילו בחבורה U_8 הסדר הכי גבוה הוא 2.

ב) האם קיים אפימורפיזם

$$f : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_4$$

פתרון: אין אפימורפיזם כי ב $\mathbb{Z}_4$ יש איבר מסדר 4 ואילו הסדר של איבר

$$(a, b, c) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$$

הוא

$$\operatorname{lcm}(\mathrm{o}(a), \mathrm{o}(b), \mathrm{o}(c)) \in \{1, 2, 3, 6\}$$

עכשיו אם היה קיים אפימורפיזם f אז היה איבר (a, b, c) כך ש

$$f(a, b, c) = 1$$

אבל

$$4 = \mathrm{o}(1) = \mathrm{o}(f(a, b, c)) \mid \mathrm{o}((a, b, c))$$

בסתירה.

הערה: אם אתם רוצים להראות קיום של פונקציה, צריך לתת פונקציה ולהוכיח שהיא מקיימת את התכונות. אם אתם רוצים להפריך צריך להניח שקיימת פונקציה עם התכונות הנדרשות ולהגיע לסתירה.

שאלה 4 (בשאלה זו אין קשר בין הסעיפים)

א) תנו דוגמא לחבורה G עם תת חבורה $H \leq G$ מאינדקס 3 שאינה נורמלית. הוכיחו.
פתרון: $G = S_3$. ו $H = \langle (12) \rangle$ ראינו כבר באינספור הזדמנויות ודרכים שתת החבורה הזו אינה נורמלית.

ב) תהי G חבורה ו $N \lhd G$ תת חבורה נורמלית. נתון כי:

- $|G| \leq 21$.
- $|N| = 6$.
- קיים $a \in G$ כך ש $a \notin N$ ו $aN = Na^3$.

מצאו את הסדר של G.
פתרון: לפי לגזרנז'

$$6 \mid |G|$$

ולכן

$$|G| \in \{6, 12, 18\}$$

עכשיו נתון שיש $a \in G$ כך ש H $a \notin$ אז

$$|G| \neq 6$$

בנוסף N נורמלית ולכן לפי הנתון

$$Na^3 = a^3N = aN$$

זה אומר ש

$$(aN)^2 = a^2N = N$$

ולכן הסדר של aN הוא 2 בתוך G/N (הוא לא 1 כי $a \notin N$). ולכן

$$2 \mid |G/N| = \frac{|G|}{|N|}$$

כלומר

$$12 \mid |G|$$

ולכן בהכרח

$$|G| = 12$$

מש"ל.