

## תרגיל 6

1. נניח כי  $f, f_n : X \rightarrow [0, \infty]$  הינן פונקציות מדידות בממ"ח  $(X, S, \mu)$ .  $f_n \rightarrow f$  כב"מ ו  
כמעט בכל מקום. הוכיחו כי  $\int_A f_n \rightarrow \int_A f < \infty$  עבור כל  $A \in S$ .

2. תהי  $f$  פונקציה מדידה לבג. הראו כי קיימת פונקציה מדידה בורל  $g$  כך ש  $g = f$  כמעט בכל מקום.

הדרכה:

- קרבו את  $f$  בעזרת פונקציות פשוטות  $f_n$ .
- הראו כי קיימות פונקציות פשוטות  $g_n$  המדידות בורל ומקיימות  $f_n = g_n$  כב"מ בעזרת משפט האיפיון של קבוצות לבג.
- הראו כי הגבול של  $g_n$  (תחת תיקון קל) הינה הפונקציה הנדרשת.

3. (משפט לוסין) תהי  $f = 1_A$  פונקצית דריכלה בקטע  $[0, 1]$ , כלומר,  $A = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ . הוכיחו כי לכל  $\varepsilon > 0$  קיימת קבוצה סגורה  $F$  (מצאו את  $F$  ממש) בקטע  $[0, 1]$  כך שהצמצום של  $f$  על  $F$  הינה פונקציה רציפה ומתקיים  $m([0, 1] \setminus F) < \varepsilon$ .