מופשטת 3 תשע"ה - פתרון תרגיל 4

1. מצאו את שדות הפיצול של הפולינומים הבאים מעל $\mathbb{Q}$, חשבו את המימדים שלהם:

(א) $x^7 - 5$

השורשים של הפולינום הם $\sqrt[7]{5},\ \rho_7\sqrt[7]{5},\ \ldots,\ \rho_7^6\sqrt[7]{5}$ ולכן שדה הפיצול הוא $E = \mathbb{Q}[\sqrt[7]{5},\ \rho_7\sqrt[7]{5},\ \ldots,\ \rho_7^6\sqrt[7]{5}] = \mathbb{Q}[\sqrt[7]{5},\ \rho_7]$ (את השיוויון האחרון צריך להוכיח).
$[E:\mathbb{Q}]\,|\,[\mathbb{Q}[\sqrt[7]{5}]:\mathbb{Q}] = 7$ (כי $x^7 - 5$ פולינום מתאפס אי־פריק איזנשטיין).
$[E:\mathbb{Q}]\,|\,[\mathbb{Q}[\rho_7]:\mathbb{Q}] = 6$ (ראינו עבור שורש יחידה מסדר ראשוני).
ולכן $[E:\mathbb{Q}] \geq 42$.
מצד שני, $[E:\mathbb{Q}] = [E:\mathbb{Q}[\rho_7]][\mathbb{Q}[\rho_7]:\mathbb{Q}] \leq [\mathbb{Q}[\sqrt[7]{5}]:\mathbb{Q}][\mathbb{Q}[\rho_7]:\mathbb{Q}] = 42$. ולכן המימד הוא 42.

(ב) $x^6 - x^3 - 2$

השורשים של הפולינום הם $-1, -\rho_3,\ -\rho_3^2,\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{2}\rho_3,\ \sqrt[3]{2}\rho_3^2$.
ולכן שדה הפיצול הוא $E = \mathbb{Q}\left[-1, -\rho_3,\ -\rho_3^2,\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{2}\rho_3,\ \sqrt[3]{2}\rho_3^2\right] = \mathbb{Q}[\rho_3,\ \sqrt[3]{2}]$
(יש לנמק את השיוויון האחרון).
$[E:\mathbb{Q}]\,|\,\left[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]:\mathbb{Q}\right] = 3$ (ראינו).
$[E:\mathbb{Q}]\,|\,[\mathbb{Q}[\rho_3]:\mathbb{Q}] = 2$ (ידוע).
ולכן $[E:\mathbb{Q}] \geq 6$.
מצד שני: $[E:\mathbb{Q}] = [E:\mathbb{Q}[\rho_3]][\mathbb{Q}[\rho_3]:\mathbb{Q}] \leq [\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]:\mathbb{Q}][\mathbb{Q}[\rho_3]:\mathbb{Q}] = 6$.
ולכן המימד הוא 6.

(ג) $x^4 - 9x^2 + 8$

השורשים של הפולינום הם $1,\ -1,\ \sqrt{8},\ -\sqrt{8}$ ולכן שדה הפיצול הוא $E = \mathbb{Q}[\pm 1, \pm\sqrt{8}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ (צריך להוכיח את השיוויון האחרון).
וכבר ראינו $[E:\mathbb{Q}] = 2$.

2. מצאו את כל תתי השדות של $\mathbb{C}$ שאיזומורפיים ל $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$. הראו שהם איזומורפיים (כתבו את האיזומורפיזם בצורה מפורשת) אך שונים כקבוצות.

נניח $f : \mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}] \to K$ הוא איזומורפיזם כזה. הוא בפרט איזומורפיזם של חוגים ולכן הוא בהכרח שומר על $\mathbb{Q}$. כלומר שהוא $\mathbb{Q}$־איזומורפים.
כיוון שכך, $f\left(\sqrt[3]{5}\right)$ הוא בהכרח שורש של הפולינום $x^3 - 5$ (כי הוא פולינום מעל $\mathbb{Q}$ המתאפס ב $\sqrt[3]{5}$).
לכן האפשרויות היחידות ל $f\left(\sqrt[3]{5}\right)$ הם $\left\{\sqrt[3]{5},\ \sqrt[3]{5}\rho_3,\ \sqrt[3]{5}\rho_3^2\right\}$. ניתן לראות שכל אחד

מהם מגדיר איזומורפיזם (בהתאמה) לשדות $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}],\ \mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}\rho_3],\ \mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}\rho_3^2]$. ולכן אלו כל 3 האפשרויות ל K.
(אגב, מכך שx^3-5 הוא פולינום אי־פריק, יכולנו לדעת שבהכרח לכל שורש שלו שנבחר קיים איזומורפיזם בין השדות שמעביר את $\sqrt[3]{5}$ לשורש שבחרנו).

3. יהיו $F\subset L\subset F[a]$ שדות. ויהי f הפולינום המינימלי של a מעל L. הוכיחו כי L נוצר (מעל F) ע"י כל המקדמים של f.

נסמן $f=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ את הפולינום המינימלי של a, ו$K=$ $F[a_{n-1},\ldots,a_0]$ השדה הנוצר מהמקדמים. נשים לב ש $F\subseteq K\subseteq L$.
נחשב את $K[a]$: נשים לב ש $f\in K[x]$ פולינום המתאפס ב a ומצד שני הוא אי־פריק שם כי הוא מתוקן ואי־פריק מעל התת־שדה L (תזכרו בגאוס). ולכן $[F[a]:K]=degf=[F[a]:L]$ וזה גורר (למשל מכפליות המימד, כשחושבים על המימד מעל F) ש $K=L$.

4. השתמשו התרגיל הקודם והוכיחו: אם $F[a]/F$ הרחבה אלגברית מדרגה n, אז יש מס' סופי של תתי שדות $F\subset L\subset F[a]$.

נסמן בf את הפולינום המינימלי של a מעל F. יהי $F\subset L\subset F[a]$, אזי L נוצר ע"י המקדמים של הפולינום המינימלי של a מעל L שנסמנו בg. נשים לב ש־ $g\mid f$ – ומכיוון שכמות המחלקים של f היא סופית, נקבל שכמות שדות הביניים סופית.
(אגב, היום אתם מכירים הוכחה אחרת לזה...)

5. הוכיחו שאם K_1,K_2 הם שדות פיצול (של פולינומים כלשהם) מעל שדה F, אזי הקומפוזיטום שלהם K_1K_2 הוא גם שדה פיצול.

נניח f_1,f_2 הם הפולינומים של K_1,K_2 בהתאמה עם שורשים α_i ו־ β_j.
אזי $K_1=F[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]$ ו־ $K_2=F[\beta_1\ldots,\beta_k]$ ואז הקומפוזיטום $K_1K_2=$ $F[\alpha_1\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_k]$ הוא שדה הפיצול של $f_1\cdot f_2$ (רואים שהוא נוצר בדיוק מכל השורשים של $f_1\cdot f_2$).