תורת הקבוצות תרגיל 7 - פתרון

1. א. מאקסיומת הזווג על a עם a קיים: $\{a\}$. מאקסיומת הזווג על a ו-b קיים $\{a,b\}$, ומאקסיומת הזווג קיים גם $\{\{a,b\},\{a\}\}$

ב. מאקסיומת האחדות $\emptyset = A \iff$ האיברים שווים.

אם $a=c$ אז $\{a\}=\{c\}$ ואם $b=d$ אז $\{a,b\}=\{c,d\}$

ולכן $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\} \Rightarrow (a,b)=(c,d)$

אם $(a,b)=(c,d)$ אז $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$,

יש 2 אפשרויות:

I $\{a\}=\{c\}$ ו-$\{a,b\}=\{c,d\}$.

אז $a=c$ ולכן $b=d$

II $\{a\}=\{c,d\}$ ו-$\{a,b\}=\{c\}$

$\Downarrow$ $c=d$ כי הקבוצה בגודל 1 ובנוסף, $a=c=d$

$\Downarrow$ $b=a$ ובנוסף, $b=a=c$.

כלומר $(a,b)=(a,a)$

$(c,d)=(c,c)$

וכן, $a=c$.

2. א. F לא ריקה, נקח $A \in F$

$$\cap F = \{x \in A : \forall B \in F,\ x \in B\}$$

A קבוצה, אז מאקסיומת ההפרדה על A, $\cap F$ היא קבוצה.

ב. אם F ריקה, אז $\cap F$ היא "הכל", כי לכל x, $\forall B \in \emptyset\ x \in B$ באופן ריק. וכמובן שזאת לא קבוצה.

3. יהי A אוסף סופי. נמספר את איבריו $a_1 \dots a_n$.

נבנה כלל התאמה מ-n ל-A: $i \mapsto a_i$.

מאחר שידוע ש-n היא קבוצה, לפי אקסיומת ההחלפה גם A קבוצה.

4. ראינו בתרגול ש-$A \times B$ קבוצה.

פונ' מ-A ל-B היא תת-קבוצה של $A \times B$ כך שלכל $a \in A$ קיים $b \in B$

יחיד כך ש-(a,b) נמצא בקבוצה.

המשך

מאקסיומת קבוצת החזקה $P(A\times B)$ היא קבוצה.

$A^B = \{ C \subseteq P(A\times B) \mid \forall a\in A\ \exists b\in B$ יחיד $: (a,b)\in C \}$

היא קבוצה מאקסיומת ההפרדה

5. <u>פתרון אחד</u>: תהי A קבוצה. $\{A\}$ קבוצה מגודל 1.

נניח שקיימת קבוצת כל הקבוצות מגודל 1. נסמנה ב-C.

תהי A קבוצה. $\{A\} \in C$. אם C קבוצה אז $\bigcup C$ קבוצה

(מאקסיומת האיחוד). לכן לכל קבוצה A, $A \in \bigcup C$. בסתירה לכך

שבאוסף של כל הקבוצות הוא לא קבוצה.

<u>פתרון שני</u>: של גיא קבני:

נניח שבאוסף של כל הקבוצונים הוא קבוצה. נסמנו ב-C

$\{C\}$ קבוצה מגודל אחד נקבל:

$\{C\} \in C \in \{C\}$

וראינו שמצב כזה לא יכול לקרות.