

פתרון תרגיל בית 2

שאלה 1

חשב את האינטגרליים הבאים השתמש באינטגרליים המיידים:

$$א. \int \frac{9^x - 4^x}{3^x - 2^x} dx$$

$$ב. \int \frac{11}{\sqrt[3]{4-5x}} dx$$

$$ג. \int \frac{x^2 + 4x + 5}{x+4} dx$$

$$ד. \int \sin x \cos 5x dx$$

$$ה. \int (1 + \sqrt[3]{x^2})^2 dx$$

פתרון שאלה 1

סעיף א

$$\int \frac{9^x - 4^x}{3^x - 2^x} dx = \int \frac{(3^x - 2^x) \cdot (3^x + 2^x)}{3^x - 2^x} dx = \int (3^x + 2^x) dx = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{2^x}{\ln 2} + c$$

סעיף ב

$$\int \frac{11}{\sqrt[3]{4-5x}} dx = \int 11 \cdot (4-5x)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{11}{-5} \cdot \frac{3}{2} (4-5x)^{\frac{2}{3}} + c = -\frac{33}{10} \sqrt[3]{(4-5x)^2} + c$$

סעיף ג

$$\int \frac{x^2 + 4x + 5}{x+4} dx = \int \left(\frac{x(x+4)}{x+4} + \frac{5}{x+4} \right) dx = \int \left(x + \frac{5}{x+4} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 5 \ln|x+4| + c$$

סעיף ד

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

נשתמש בזהויות

$$\int \sin x \cos 5x dx = \int \frac{1}{2} (\sin 6x + \sin(-4x)) dx = \int \frac{1}{2} (\sin 6x - \sin(4x)) dx = -\frac{1}{12} \cos 6x + \frac{1}{4} \cos 4x + c$$

סעיף ה

$$\int (1 + \sqrt[3]{x^2})^2 dx = \int \left(1 + 2x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{3}} \right) dx = x + \frac{6x^{\frac{5}{3}}}{5} + \frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7} + c$$

שאלה 2

חשב את האינטגרליים הבאים בעזרת שיטת ההצבה:

$$א. \int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$$

$$ב. \int x^3 \sqrt{x^4 + 1} dx$$

$$ג. \int \frac{x}{\sqrt{x + \sqrt[3]{x}}} dx$$

פתרון שאלה 2

סעיף א

$$\int \sin t dt = -\cos t = -\cos(\ln x) + c \quad dt = \frac{dx}{x} \leftarrow t = \ln x$$

סעיף ב

$$\int x^3 \sqrt{x^4+1} dx = \frac{1}{4} \int \sqrt{t} dt = \frac{2t\sqrt{t}}{6} = \frac{2(x^4+1)\sqrt{x^4+1}}{6} + c \quad dt = 4x^3 dx \leftarrow t = x^4 + 1$$

סעיף ג

$$x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$$

$$\int \frac{t^6 \cdot 6t^5}{t^3 + t^2} dt = \int \frac{6t^9}{1+t} dt$$

שאלה 3

חשב את האינטגרלים הבאים בעזרת שיטת אינטגרציה בחלקים:

א. $\int x^3 \ln x dx$

ב. $\int \frac{2x}{\sqrt{x-1}} dx$

ג. $\int \arctan x dx$

ד. $\int e^x \sin(2x) dx$

ה. $\int x \cos x dx$

ו. $\int \sqrt[3]{x} \ln x dx$

פתרון שאלה 3

סעיף א

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$v = \frac{x^4}{4} \quad u = \ln x$$

$$v' = x^3 \quad u' = \frac{1}{x}$$

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \int \frac{x^3}{4} dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + c$$

סעיף ב

$$u = 2x \quad v = 2(x-1)^{0.5}$$

$$u' = 2 \quad v' = (x-1)^{-0.5}$$

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x-1}} dx = 4x\sqrt{x-1} - \int 4(x-1)^{\frac{1}{2}} dx = 4x\sqrt{x-1} - \frac{8(x-1)\sqrt{x-1}}{3} + c$$

סעיף ג

$$u' = \frac{1}{1+x^2} \quad u = \arctan x$$

נסמן $v = x$ ואז $v' = 1$

נשתמש בנוסחה $\int uv' dx = uv - \int u'v dx$ ונקבל

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx$$

נשאר לנו לפתור את האינטגרל הבא

נבחר בהצבה $t = x^2$ ואז $dt = 2x dx$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t} = \frac{1}{2} \ln|1+t| = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

סעיף ז

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$v = e^x \quad u = \sin(2x)$$

$$v' = e^x \quad u' = 2 \cos(2x)$$

$$\int e^x \sin(2x) dx = e^x \sin(2x) - 2 \int e^x \cos(2x) dx$$

$$\int e^x \cos(2x) dx \text{ לשאר לחשב את האינטגרל}$$

ניעזר שוב באינטגרציה בחלקים:

$$v = e^x \quad u = \cos(2x)$$

$$v' = e^x \quad u' = -2 \sin(2x)$$

$$\int e^x \cos(2x) dx = e^x \cos(2x) + 2 \int e^x \sin(2x) dx$$

$$\int e^x \sin(2x) dx = e^x \sin(2x) - 2 \cdot (e^x \cos(2x) + 2 \int e^x \sin(2x) dx)$$

$$\int e^x \sin(2x) dx = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) - 4 \int e^x \sin(2x) dx$$

$$5 \int e^x \sin(2x) dx = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x)$$

$$\int e^x \sin(2x) dx = \frac{1}{5} e^x \sin(2x) - \frac{2}{5} e^x \cos(2x) + c$$

סעיף ה

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$v = \sin x \quad u = x$$

$$v' = \cos x \quad u' = 1$$

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c$$

סעיף ו

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$v = \ln x \quad u = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}}$$

$$v' = \frac{1}{x} \quad u' = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\int \sqrt[3]{x} \ln x dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \ln x - \frac{3}{4} \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \ln x - \frac{9}{16} x^{\frac{4}{3}} + c$$