בוחן בטופולוגיה

יש לענות על כל שלוש השאלות. הניקוד על כל שאלה הוא 36 נקודות. חלוקת הנקודות בין הסעיפים שווה.
בהצלחה!

1. תזכורת: l_∞ הוא המרחב של כל הסדרות החסומות מעל הממשיים. כלומר, $l_\infty = \{(x_n) : \sup|x_n| < \infty\}$, עם נורמת הסופרימום: $||(x_n)|| = \sup|x_n|$.

   (א) יהי $i \in \mathbb{N}$ קבוע, ונסתכל על פונקציית ההטלה: $\Pi_i : l_\infty \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $\Pi_i((x_n)) = x_i$. הוכיחו שהפונקציה רציפה.

   (ב) תהי סדרה מתכנסת בl_∞: $(x_n^i) \to (x_n)$. כאשר (x_n^i) מסמל את האיבר הi בסדרה המתכנסת. הוכיחו שיש התכנסות רכיב־רכיב. כלומר, לכל $n \in \mathbb{N}$, $x_n^i \to x_n$.

   (ג) תהי סדרה בl_∞ $((x_n^i))$ שמתכנסת רכיב־רכיב. כלומר, לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $x_n \in \mathbb{R}$ כך ש $x_n^i \to x_n$. הוכיחו/הפריכו: הסדרה $((x_n^i))$ מתכנסת בl_∞.

2. נתבונן בקבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$, ולכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר: $O_n = \{n, n+1, n+2...\}$. נסתכל על האוסף $\tau = \{O_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{Z}\}$.

   (א) הוכיחו שτ מהווה טופולוגיה על $\mathbb{Z}$.

   (ב) תהי $f : (\mathbb{Z}, \tau) \to (\mathbb{Z}, \tau_{disc})$ פונקציה רציפה. הוכיחו שהיא קבועה.

3. יהי X מרחב שלם ו$A \subseteq X$. הוכיחו: A מרחב שלם (כתת מרחב של X) $\iff$ A סגורה בX.