

אלגברה לינארית למהנדסים – תרגיל בית 3

תאריך הגשה: 25.04.2017

מערכת משוואות לינאריות – המשך

שאלה 1

א. תהי $Ax=b$ מערכת שאינה הומוגנית, כלומר $b \neq 0$. הוכיחו כי אם x_1, x_2 פתרונות, אזי x_1+x_2 אינו פתרון.

ב. הוכיחו או הפריכו: קיימת מערכת $Ax=b$ לא הומוגנית ($b \neq 0$) כך שוקטור האפס הוא פתרון.

מטריצות

שאלה 2

נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

חשבו במידה וניתן את הביטויים הבאים:

$$5BJ - 3B, \quad JA, \quad J^3, \quad BJ^2, \quad (3J - 2B)^T$$

שאלה 3

א. תהיינה $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ו- $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 6 & -5 & 8 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

חשבו את המטריצות $(AB)^2$ ו- A^2B^2 . מדוע זה לא אותו דבר?

ב. חשבו את המטריצה $A-I_3$ ואת $A+5I_3$.

ג. הראו כי לכל מטריצה ריבועית A ולכל סקלר a מתקיים

$$(A+aI)^2 = A^2 + 2aA + a^2I$$

שאלה 4

תהיינה A מטריצה מסדר $m \times r$, B מסדר $r \times n$ ותהי $C = AB$.
א. הוכיחו כי:

- אם יש ב- A שורה שלמה של אפסים, אז גם ב- C יש שורה שלמה של אפסים. איזו שורה זאת?
- אם יש ב- B עמודה שלמה של אפסים, אז גם ב- C יש עמודה שלמה של אפסים. איזו עמודה זאת?

ב. הוכיחו: אם יש ב- A שורה שלמה של אפסים, אז לא קיימת מטריצה X כך ש- $AX = I$.

שאלה 5

תהי A מטריצה ריבועית מסדר $n \times n$ שרכיביה a_{ij} . נגדיר

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

תהיינה A, B שתי מטריצות מסדר $n \times n$ ו- a סקלר כלשהו. הוכיחו:

א. $\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$

ב. $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

ג. הראו (ע"י דוגמה כלשהי) כי בדרך כלל $\text{tr}(AB) \neq (\text{tr}(A))(\text{tr}(B))$

שאלה 6

תהי $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. אפיינו את כל המטריצות X המקיימות $AX = XA$.

שאלה 7

א. הוכיחו כי מטריצה ריבועית A מסדר 2×2 מעל שדה הממשיים, \mathbb{R} , מקיימת:

$$A^T \cdot A = \underline{0}$$

כאשר $\underline{0}$ מייצג את מטריצת האפס (במקרה זה מטריצה 2×2 , שכל אבריה הם אפסים), אם ורק אם:

$$A = \underline{0}$$

רמז: רשמו את A בייצוג כללי:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ומצאו את התנאים ההכרחיים על האיברים a, b, c, d כך שהנ"ל מתקיים.

ב. השבו את $A^T \cdot A$, עבור המטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

הסבירו את התוצאה, האם אין בכך סתירה לסעיף א'!?

שאלה 8

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
 נתונות 2 מטריצות

(א) מצא את $(AB)_{11}, (AB)_{13}, (AB)_{22}$

(ב) בעזרת כפל עמודה עמודה הצג את העמודה הראשונה של AB כסכום משוקלל של עמודות A^2 .

(ג) בעזרת כפל שורה שורה הצג את השורה השנייה של AB כסכום משוקלל של שורות B .

שאלה 9

יהיו מטריצות: A בגודל 3×3 , B בגודל 4×5 , C בגודל 5×1 ; D בגודל 5×4 ו- E בגודל 3×5 אלו מבין הפעולות הבאות מוגדרת? במידה והפעולה מוגדרת מה גודל המטריצה המתקבלת?

BCB (א)

$B + D$ (ב)

A^3E (ג)

$A(E + E)D$ (ד)

שאלה 10

האם הכפל של המטריצות הבאות מוגדר? אם כן, מה תוצאת הכפל?

א.

$$\begin{pmatrix} 5 & -9 & 3 & 9 \\ 13 & -2 & -4 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -8 & 7 & 1 \\ 3 & -5 & -4 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -8 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

ב.

$$\begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -8 & 7 & 1 \\ 3 & -5 & -4 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -8 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

ג.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \quad -2 \quad 3 \quad 4)$$

שאלה 11

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

חשבו את A^{5777}