

אלגברה ליניארית 2 – תרגיל מס' 5

1. א. תהי $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ טרנספורמציה ליניארית המוגדרת ע"י: $T(x, y, z) = (x, x - y, 0)$.

בדוק האם תתי-המרחבים שלהלן הם T-אינווריאנטיים:

$$U_1 = Sp\{(2, 1, 0)\}$$

$$U_2 = Sp\{(1, 0, 0)\}$$

$$U_3 = Sp\{(0, 0, 1)\}$$

ב. תהי $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ טרנספורמציה ליניארית המוגדרת ע"י:

$$T(x, y, z, u) = (x + z, 0, 0, x - z)$$

מצא תת-מרחב מממד 2 של \mathbb{R}^4 שהוא T-אינווריאנטי.

כמו-כן מצא תת-מרחב שאינו T-אינווריאנטי.

2. א. יהיו v_1, \dots, v_k וקטורים עצמיים השייכים לאותו ערך עצמי λ של T. הוכח כי תת-

המרחב $W = Sp\{v_1, \dots, v_k\}$ הוא T-אינווריאנטי.

ב. הסק מסעיף א' כי כל תת-מרחב של תת-המרחב העצמי V_λ הוא T-אינווריאנטי.

ג. יהי W תת-מרחב T-אינווריאנטי כלשהו (לאו דוקא תת-המרחב העצמי של T). האם

נכון הוא, כי כל תת-מרחב של W הוא T-אינווריאנטי?

ד. יהי W תת-מרחב T-אינווריאנטי ממימד 1. הוכח כי $W = Sp\{v\}$ כאשר v הוא וקטור

עצמי של T.

ה. השתמש בסעיף ד', ומצא את כל תתי-המרחבים האינווריאנטיים של הטרנספורמציה:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3. תהי T טרנספורמציה ליניארית במרחב דו-ממדי V. נניח כי ל-T אין ערכים עצמיים.

מצא את כל תתי-המרחבים שהם T-אינווריאנטיים.

4. תהי $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ טרנספורמציה ליניארית המוגדרת ע"י:

$$T(x, y, z, u) = (x + z, 0, 0, x - z)$$

ויהי $W = \{(\alpha, 0, 0, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ תת-מרחב T-אינווריאנטי.

א. רשום את המטריצה $[T_W]_{B_1}$ בבסיס $B_1 = \{v_1 = (1, 0, 0, 1), v_2 = (1, 0, 0, -1)\}$ של W .

ב. השלם את B_1 לבסיס B של \mathbb{R}^4 ורשום את המטריצה $[T]_B$.

5. תהי $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ טרנספורמציה לינארית המוגדרת ע"י:

$$T(x, y, z, u) = \left(\frac{5}{2}x + y - \frac{1}{2}z + u, 3y + u, \frac{1}{2}x + y + \frac{3}{2}z + u, 3u\right)$$

א. הראה כי:

$$W_1 = Sp\{v_1 = (1, 0, 1, 0), v_2 = (1, 0, -1, 0)\}$$

$$W_2 = Sp\{v_3 = (1, 1, 1, 0), v_4 = (1, 1, 1, 1)\}$$

הם תתי-מרחבים T-אינווריאנטיים.

ב. הוכח כי $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$.

ג. רשום את מטריצות הטרנספורמציות $[T]_{W_1}$ ו- $[T]_{W_2}$ בבסיסים $B_1 = \{v_1, v_2\}$,

בהתאמה. $B_2 = \{v_3, v_4\}$.

ד. מצא את $[T]_B$.

בהצלחה!