תרגול 11

9 ביולי 2013

הפולינום האופייני

הגדרה: תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ אזי $f_A(\lambda) = |\lambda I_n - A|$ הוא הפולינום האופייני שלה.
דוגמא $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ אזי

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= |\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} \lambda-5 & -6 \\ 3 & \lambda+4 \end{pmatrix}| \\ &= (\lambda-5)(\lambda+4)+18 = \lambda^2-\lambda-2 = (\lambda-2)(\lambda+1) \end{aligned}$$

הערה: הדרגה של הפולינום האופייני הוא n
תרגיל: מהו הפולינום האופייני של $I_n, 0_n$
פתרון $f_0(\lambda) = |\lambda I - 0| = (\lambda)^n$, $f_I(\lambda) = |\lambda I - I| = (\lambda-1)^n$
תרגיל: הוכח שלמטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני.
פתרון יהיו A, Bמטריצות דומות (כלומר $A = PBP^{-1}$) אזי

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= |\lambda I_n - A| = |\lambda I_n - PBP^{-1}| = |\lambda P I_n P^{-1} - PBP^{-1}| \\ &= |P(\lambda I_n - B)P^{-1}| = |P| \cdot |(\lambda I_n - B)| \cdot |P^{-1}| \\ &= |P^{-1}| \cdot |P| \cdot |(\lambda I_n - B)| = |(\lambda I_n - B)| = f_B(\lambda) \end{aligned}$$

ע"ע (ערכים עצמיים), ו"ע (וקטורים עצמיים) והמרחב העצמי

הגדרה: תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. אם קיים $0 \neq v \in \mathbb{F}^n$ כך ש $Av = \lambda v$ אזי v יקרא ו"ע, λ יקרא ע"ע.
חידוד: $v \neq 0$ אבל יתכן $\lambda = 0$.
דוגמא:

1. $A = I$ אזי לכל v מתקיים $Av = v$ ולכן עבור מטריצת היחידה $\lambda = 1$ הוא ע"ע וכל וקטור הוא ו"ע (של 1) .
2. $A = 0$ אזי לכל v מתקיים $Av = 0 = 0 \cdot v$ ולכן עבור מטריצת האפס $\lambda = 0$ הוא ע"ע וכל וקטור הוא ו"ע (של 0).

איך מוצאים ע"ע ו"ע?

$Av=\lambda v,\, v\neq 0 \Leftrightarrow Av-\lambda v=0,\, v\neq 0 \Leftrightarrow (A-\lambda I)v=0,\, v\neq 0 \Leftrightarrow (A-\lambda I)$ לא הפיכה $\Leftrightarrow |A-\lambda I|=0 \Leftrightarrow |\lambda I-A|=0 \Leftrightarrow f_A(\lambda)=0$.

כלומר λ הוא ע"ע של A אמ"מ $f_A(\lambda)=0$.

דוגמא $A=\begin{pmatrix}5 & 6\\ -3 & -4\end{pmatrix}$ מצאנו כי $f_A(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda+1)$

ולכן $\lambda_1=2, \lambda_2=-1$ הם ע"ע של A.

אחרי שיודעים ע"ע - איך מוצאים ו"ע?

עבור מטריצה A נניח שמצאנו ע"ע λ אזי הו"ע המתאים (לע"ע λ) מקיים $(A-\lambda I)v=0$ כלומר $v\in N(A-\lambda I)$

דוגמא: $A=\begin{pmatrix}5 & 6\\ -3 & -4\end{pmatrix}$ $\lambda_1=2$ נמצא ו"ע מתאים.

ש"ל $v\in N(\begin{pmatrix}5 & 6\\ -3 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix})$) כלומר $v\in N(\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & -6\end{pmatrix})$.

נדרג $\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & -6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3 & 6\\ 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ ולכן $\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}\in N(\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & -6\end{pmatrix})$

ולכן הוא ו"ע המתאמים ל $\lambda_1=2$.

אכן מתקיים $\begin{pmatrix}5 & 6\\ -3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$.

באותו אופן נמצא ו"ע ל $\lambda_2=-1$. נמצא $v\in N(\begin{pmatrix}5 & 6\\ -3 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix})$)

נדרג $\begin{pmatrix}6 & 6\\ -3 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}6 & 6\\ 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ כלומר $\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$ ו"ע המתאים ל $\lambda_2=-1$.

תרגיל: יהיו A,B שתי מטריצות הוכח: ע"ע של BA שווים לע"ע של AB.

הוכחה: תרגיל (פצל למקרים אם $\lambda=0$ ואם $\lambda\neq 0$)

לסיכום- בהנתן מטריצה A

1. בעזרת $f_A(\lambda)=0$ נמצא ע"ע של A
2. לאחר שמצאנו λ ע"ע של A וקטור עצמי מתאים הוא $0\neq v\in N(A-\lambda I)$

תרגיל: מצא ע"ע ו"ע של $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

פתרון: $f_A(\lambda)=|\begin{pmatrix}\lambda-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}|=(\lambda-1)^2\lambda^2$

כלומר $\lambda_1=1,\, \lambda_2=0$. נמצא ו"ע: עבור $\lambda_1=1$

$$N(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix})=N(\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix})=$$

$$\{\begin{pmatrix} t \\ s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = span\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

עבור $\lambda_1 = 0$

$$N(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) = N(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}\} =$$

$$span\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

חידוד (מהתרגיל): לע"ע λ_0 יתכנו כמה ו"ע (בת"ל) ואין שיווין הכרחי בין המספר הזה לבין מספר הפעמים בו מופיע $\lambda - \lambda_0$ בפולינום האופיני.

תרגיל: נניח $Av = \lambda v,\ v \neq 0$ (כלומר v ו"ע) הוכח: גם αv ו"ע המתאים לλ לכל $\alpha \neq 0$

הוכחה: $A(\alpha v) = \alpha A v = \alpha \lambda v = \lambda(\alpha v)$. כיוון ש $\alpha \neq 0,\ v \neq 0$ אזי גם $\alpha v \neq 0$.

משפט: תהא Aמטריצה עם $\lambda_1 \dots \lambda_m$ ע"ע שונים, $v_1, \dots v_m$ ו"ע עצמיים מתאימים אזי $\{v_1, \dots v_m\}$ בת"ל

הגדרה: בסימונים לעיל המרחב העצמי של λ הוא $V_\lambda = N(A - \lambda I)$

הערה: $V_\lambda = \{v \,|Av = \lambda \cdot v,\ v \text{ eigenvector}\} \cup \{0\}$

הערה: בסימונים האלה, מהמשפט נובע כי $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{0\}$ לכל $i \neq j$

אפילו $V_{\lambda_i} \cap (\bigoplus_{j \neq i} V_{\lambda_j}) = \{0\}$

ליכסון

הגדרה: Aתקרא לכסינה אם A דומה למטריצה אלכסונית (כלומר קיים Pהפיכה כך ש $P^{-1}AP = D$ אלכסונית)

דוגמא: $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ ראינו כי $\{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1\}$ע"ע

ו $\{v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ו"ע בהתאמה.

נגדיר $P = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ כעת:

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}A(v_1, v_2) = P^{-1}(Av_1, Av_2) \\ &= P^{-1}(\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2) = P^{-1}(v_1, v_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ &= P^{-1}P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כלומר A לכסינה.

משפט: $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ לכסינה$\Leftrightarrow$ יש בסיס של ו"ע ל $\mathbb{F}^n$ (הוכח בכיתה)

הוכחה: $(\Leftarrow)$ נתון A לכסינה קיימת P הפיכה כך ש $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$
.

נסמן $P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & | & | \end{pmatrix}$ אזי

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ Av_1 & \cdots & Av_n \\ | & | & | \end{pmatrix} = AP = PD = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \lambda_1 v_1 & \cdots & \lambda_n v_n \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

כלומר לכל i מתקיים $Av_i = \lambda_i v_i$ כלומר v_i ע"ע וכיוון ש P הפיכה הם בת"ל (ובפרט $v_i \neq 0$לכל i) ולכן בסיס ל $\mathbb{F}^n$

$(\Rightarrow)$ יש בסיס $\{v_1 \dots v_n\}$ של ו"ע כלומר לכל i מתקיים $Av_i = \lambda_i v_i$.

נגדיר $P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & | & | \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}\begin{pmatrix} | & | & | \\ Av_1 & \cdots & Av_n \\ | & | & | \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} | & | & | \\ \lambda_1 v_1 & \cdots & \lambda_n v_n \\ | & | & | \end{pmatrix} \\ &= P^{-1}P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

תרגיל: קבע האם $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$לכסינה כאשר:

1. $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ מטריצה ממשית.
   פתרון: $f_A(\lambda) = |\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}| = \lambda^2 + 1$ כיוון של f_A אין שורשים בממשים בפרט אין ל A ו"ע ולכן A אינה לכסינה.
2. $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$מטריצה מרוכבת.
   פתרון: $f_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$ השורשים הם $\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i$ נמצא ו"ע.
   עבור $\lambda_1 = i$. $N(\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}) = N(\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$ ולכן $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ ו"ע.
   עבור $\lambda_1 = -i$. $N(\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}) = N(\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$ ולכן $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ ו"ע.
   קל לראות ש $\{v_1, v_2\}$ בת"ל ולכן לפי השלישי חינם בסיס ל $\mathbb{C}^2$ ולכן A לכסינה.

תרגיל: האם כל מטריצה $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ לכסינה?

פתרון: לא! למשל $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $f_A(\lambda) = |\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}| = (\lambda-1)^2$.
$\lambda = 1$ ע"ע יחיד.
ו"ע: $N(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$ ולכן $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ו"ע יחיד בפרט אין בסיס של ו"ע ל $\mathbb{C}^2$ ולכן A אינה לכסינה.

תרגיל: תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה. יהיו $\lambda_1\dots\lambda_n$ הע"ע שלה. הוכח $|A|=\prod_{k=1}^{n}\lambda_k$ (כלומר הדטרמינטטה שווה למכפלה הע"ע)

פתרון: תרגיל (העזר בטענה משיעור קודם כי למטריצות דומות יש אותה דטרמיננטה)

תרגיל: תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הוכח: A אינה הפיכה $\Leftrightarrow$ ל A יש ע"ע ששווה ל-0

פתרון:($\Rightarrow$) אם ל A יש ע"ע 0 אזי קיים $v\neq 0$ כך ש $Av=0$ אזי A לא הפיכה.

($\Leftarrow$) אם A אינה הפיכה אזי קיים $v\neq 0$ כך ש $Av=0$ כלומר 0 ע"ע.

תרגיל: תהא $A=\begin{pmatrix}5&6\\-3&-4\end{pmatrix}$ חשב את A^{2013}.

פתרון: ראינו כי $\{\lambda_1=2,\lambda_2=-1\}$ ע"ע

ו $\left\{v_1=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ ו"ע בהתאמה.

נגדיר $P=\begin{pmatrix}-2&-1\\1&1\end{pmatrix},\ P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&2\end{pmatrix}$

ויתקיים $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}$ או לחילופין $A=P\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{-1}$

כעת

$$\begin{aligned}A^{2013}&=\left(P\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{-1}\right)^{2013}\\&=\left(P\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{-1}\right)\cdot\left(P\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{-1}\right)\cdots\left(P\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{-1}\right)\\&=P\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}^{2013}P^{-1}=P\begin{pmatrix}2^{2013}&0\\0&(-1)^{2013}\end{pmatrix}P^{-1}\end{aligned}$$

תרגיל: תהא $A=\begin{pmatrix}a_1&*&\cdots&*\\0&a_2&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&*\\0&\cdots&0&a_n\end{pmatrix}$ $a_i\neq a_j$ הוכח: A לכסינה.

פתרון : היעזר במשפט: $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה$\Leftrightarrow$ יש בסיס של ו"ע ל $\mathbb{F}^n$

תרגיל: הוכח ש $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\7&2&0\\0&\sqrt{17}&3\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}1&-1&5\\0&2&6\\0&0&3\end{pmatrix}$ מטריצות דומות.

פתרון: תרגיל: היעזר בתרגיל הקודם.

הצבה בפולינום

הגדרה: תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. $f(x)=a_0+a_1x+\cdots a_mx^m\in\mathbb{F}[x]$ אזי הצבה של A בפולינום $f(x)$

מוגדר להיות $f(A)=a_0I_n+a_1A+a_2A^2\cdots a_mA^m$.

דוגמא: חשב את ההצבה של $A=\begin{pmatrix}5&6\\-3&-4\end{pmatrix}$ בפולינום $f(x)=x^2-x-2$

פתרון:

$$f(A)\;=\;A^2-A-2\cdot I_2=\begin{pmatrix}5&6\\-3&-4\end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix}5&6\\-3&-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

משפט קיילי: תהא A ו $f_A(\lambda)$ הפולינום האופיני. אזי $f_A(A) = 0$