

בדידה 1 תרגיל 2

לוגיקה: DNF, CNF

8 בדצמבר 2016

1. קבע האם פסוקים אלו נתונים בצורת DNF, CNF או לא זה ולא זה, נמק:

א. $p \vee q \vee r$

ב. $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

ג. p

ד. $\neg p \vee p$

ה. $p \wedge q \wedge (\neg r \vee p) \wedge \neg q \wedge r$

ו. $p \vee \neg r \wedge (\neg p \vee r)$

פתרון:

א. גם DNF, וגם CNF.

הסבר: DNF הוא מהצורה $D_1 \vee \dots \vee D_n$. במקרה שלנו הפסוקיות D_i הן אטומים. זה גם CNF כי יש רק פסוקית אחת $C_1 = p \vee q \vee r$ והיא מורכבת מאטומים המחוברים ע"י 'או'.

ב. בצורת DNF, ולא CNF. נחלק לפסוקיות: $D_1 = p \wedge q$, $D_2 = p \wedge \neg q$. כל פסוקית מורכבת מאטומים שמחוברים ע"י \wedge והפסוקיות מחוברות ע"י \vee .

ג. גם DNF, וגם CNF.

הסבר: יש כאן רק פסוקית אחת שמורכבת רק מאטום אחד, לכן זה מקיים גם את תנאי DNF - הפסוקית מורכבת מאטומים המחוברים ע"י \wedge (כי אין עוד אטומים), וגם את תנאי CNF - הפסוקית מורכבת מאטומים המחוברים ע"י \vee (כי אין עוד אטומים).

ד. גם DNF, וגם CNF. אותו דבר כמו א.

ה. בצורת CNF: יש כאן 5 פסוקיות המחוברות ע"י \wedge ובפסוקית היחידה מבניהם שמורכבת ע"י יותר מאטום אחד, יש בין האטומים \vee .

ו. ניתן לפרש את הפסוק הנ"ל בשתי דרכים: דרך אחת: $p \vee (\neg r \wedge (\neg p \vee r))$: לא DNF, ולא CNF: יש כאן 2 פסוקיות המחוברות ע"י \vee , לכן אולי זה מתאים לצורת DNF, אבל בפסוקית השניה החיבור לא יחיד, לפעמים ע"י \vee ולפעמים ע"י \wedge . דרך שניה: $(p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee r)$: בצורת CNF. נחלק לפסוקיות: $C_1 = p \vee \neg r$, $C_2 = \neg p \vee r$. כל פסוקית מורכבת מאטומים שמחוברים ע"י \vee והפסוקיות מחוברות ע"י \wedge .

2. כתוב את הפסוקים הבאים ב DNF, השתמש בטבלת אמת:

א. $p \rightarrow (\neg p \vee r)$

ב. $(p \rightarrow r) \leftrightarrow (r \rightarrow p)$

פתרון:

א. נבנה טבלת אמת של הפסוק:

p	r	$\neg p \vee r$	$p \rightarrow (\neg p \vee r)$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

כעת נמשיך לפי האלגוריתם שלמדנו בתרגול: אנו מסתכלים על השורות בהם הביטוי מקבל ערך אמת T , כלומר על שורות 1,3,4. לשורה 1 נתאים את הפסוק $D_1 = p \wedge r$, לשורה 3: $D_2 = \neg p \wedge r$, לשורה 4: $D_3 = \neg p \wedge \neg r$. לכן, צורת DNF של הפסוק היא:

$$p \rightarrow (\neg p \vee r) = D_1 \vee D_2 \vee D_3 = (p \wedge r) \vee (\neg p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r)$$

ב. נבנה טבלת אמת של הפסוק:

p	r	$p \rightarrow r$	$r \rightarrow p$	$(p \rightarrow r) \leftrightarrow (r \rightarrow p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

כעת נמשיך לפי האלגוריתם שלמדנו בתרגול: אנו מסתכלים על השורות בהם הביטוי מקבל ערך אמת T , כלומר על שורות 1 ו-4. לשורה 1 נתאים את הפסוק $D_1 = p \wedge r$, לשורה 4: $D_2 = \neg p \wedge \neg r$. לכן, צורת DNF של הפסוק היא:

$$(p \rightarrow r) \leftrightarrow (r \rightarrow p) = D_1 \vee D_2 = (p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r)$$

3. כתוב את הפסוקים הבאים ב CNF, השתמש בטבלת אמת:

א. $p \rightarrow (\neg p \vee r)$

ב. $p \vee q$

ג. $(p \vee \neg q) \rightarrow r$

פתרון:

א. זה אותו פסוק של 3 א, לכן אם נסתכל על טבלת האמת שבנינו שם, ונבנה פסוקיות לשורות שלהם מתאים ערך אמת F בטבלה (שורה 2 במקרה הזה) נקבל:

$$p \rightarrow (\neg p \vee r) = C_1 = \neg p \vee r$$

ב. זה כבר בצורת CNF. אם נרצה למצוא את הצורה המלאה של הביטוי בצורת CNF, נבנה את טבלת האמת:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

כעת נמשיך לפי האלגוריתם שלמדנו בתרגול: נסתכל על השורות המקבלות ערך אמת F , כלומר שורה 4. נתאים לה את הפסוקית הבאה: $C_1 = p \vee q$, אין עוד פסוקיות, ולכן קיבלנו את הפסוק המקורי ללא שינוי.

ג. נבנה את טבלת האמת:

p	q	r	$p \vee \neg q$	$(p \vee \neg q) \rightarrow r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	F
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

כעת נמשיך לפי האלגוריתם שלמדנו בתרגול: נסתכל על השורות המקבלות ערך אמת F , כלומר על שורות 2, 4, 6. לשורה 2 נתאים את הפסוק $C_1 = \neg p \vee \neg q \vee r$, לשורה 4: $C_2 = \neg p \vee q \vee r$ ולשורה 6: $C_3 = p \vee \neg q \vee r$. לכן, צורת CNF של הפסוק היא:

$$(p \vee \neg q) \rightarrow r = C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 = (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$$