

תרגיל 3

1. חשב את הגבולות הבאים או הוכח שאינם קיימים:

א. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^2}{x^4 + y^2}$

ב. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

ג. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{|x| + |y|} \cos\left(\frac{1}{y^2}\right)$

ד. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$

ה. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x + y)^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

ו. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-|x-y|}{e^{(x^2 - 2xy + y^2)}}$

ז. $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^4 + y^2}$

ח. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow \infty}} (1 + x)^{\frac{y+x}{2xy}}$

2. קבע האם הפונקציות הבאות רציפות בנקודה (0,0):

א. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \ln(y+1)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

ב. $f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

3. חשב עבור הפונקציות הבאות גבולות חוזרים וגבול כפול בראשית:

א. $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$

ב. $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$

ג. $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$

4. הוכח או הפרך:

אם קיימים הגבולות החוזרים $\lim_{y \rightarrow y_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y))$

אזי קיים הגבול הכפול $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$.

5. בדוק האם הפונקציות הבאות דיפרנציאביליות בראשית:

א. $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

$$f(x, y) = (x + y)\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{ב.}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{2x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{ד.}$$

6. מצא פיתוח טיילור עד סדר 2 לפונקציות הבאות:

א. $f(x, y) = x^y$ סביב הנקודה $(1, 1)$

ב. $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ סביב הנקודה $(0, 0)$

7. נתון: $y(x) = x^3$. חשב באמצעות כלל השרשרת את הנגזרת של u לפי x , כאשר

$$u(x, y) = \ln(e^x + e^y)$$

8. נתון: $u(x, y) = \frac{x}{y}$, $v(x, y) = \frac{y}{x}$. חשב באמצעות כלל השרשרת את הנגזרות החלקיות

$$\text{לפי } x \text{ ו-} y \text{ של הפונקציה } z(u, v) = u^2 \ln v$$

9. מצא את כל הנקודות במשטח $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ עבורן המישור המשיק מקביל למישור

$$x + y + z = 1$$

10. חשב את הנגזרת של הפונקציה $z = \ln(x + y)$ בנקודה $(\frac{9}{4}, \frac{9}{2})$ בכיוון \vec{l} היוצר זווית 60° עם

הכיוון החיובי של ציר x .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{11. נתונה הפונקציה:}$$

חשב את הנגזרת המכוונת של f בכיוון הווקטור (המנרמל) $\vec{h} = (h_1, h_2)$ בנקודה $(1, 0)$.