83-116 מתמטיקה בדידה – תרגיל 3

לציין בפתרון המוגש: שם מלא, ת.ז ויום של התרגול אליו אתם באים

תרגיל 1

יש 4 קווי אוטובוסים מ A ל B ו3 קווי אוטובוסים מ B ל C.

בחירה בשלבים

א. כמה דרכים יש לנסוע מ A לC? $4 \cdot 3$

ב. כמה דרכים יש לנסוע מ A לC ולחזור? $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4$

ג. כמה דרכים יש לנסוע מ A ל C ולחזור אם לא רוצים לנסוע באתו קו פעמיים? $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$

תרגיל 2

א. כמה מס' בני 3 ספרות ניתן לבנות מהספרות 2,3,5,6,7,9,0? (מותר לחזור על ספרות. מספר לא מתחיל ב0)

$$6 \cdot 7 \cdot 7 = 294$$

ב. כמה מתוכם קטנים מ400?

הספרה הראשונה יכולה להיות רק 2,3 ולכן $2 \cdot 7 \cdot 7 = 98$

ג. כמה מהם זוגיים?

הספרה האחרונה צריכה להיות 0,6,2 ולכן $6 \cdot 7 \cdot 3 = 126$

ד. כמה מהם אי זוגיים?

אפשר פשוט לחסר: $294 - 126 = 168$

או כמו קודם לספרה האחרונה יש 4 אפשרויות ולכן $6 \cdot 7 \cdot 4 = 168$

ה. כמה מהם הם כפולה של 5?

הספרה האחרונה צריכה להיות 5 או 0 ולכן $6 \cdot 7 \cdot 2 = 84$

תרגיל 3

בשק יש 5 כדורים שחורים ו6 לבנים. כל הכדורים שונים זה מזה. כמה דרכים יש לבחור 4 כדורים אם

א. הם יכולים להיות בכל צבע

אם הצבע לא משנה אז זה כמו לבחור 4 מתוך 11 כדורים שונים.

אין החזרה והסדר לא משנה ולכן $\binom{11}{4} = 330$

ב. 2 צריכים להיות לבנים ו2 שחורים

בחירה בשלבים $\binom{5}{2}\binom{6}{2}$

ג. הם צריכים להיות באותו צבע

עיקרון הסכום (לבחור 4 שחורים + לבחור 4 לבנים) $\binom{5}{4} + \binom{6}{4}$

ד. 2 מתוכם צריכים להיות באותו צבע

אין דרך לבחור 4 כדורים בלי שיהיו 2 מאותו צבע ולכן יש 330 אפשרויות.

תרגיל 4

כמה דרכים יש לחלק n סטודנטים ל2 קבוצות (אפשר קב' ריקה)? כמה דרכים יש לחלק אותם ל2 כיתות (אי אפשר כיתה ריקה)?

הבהרה: הכוונה הייתה שאין הבדל בין הקבוצות אבל כן יש הבדל בין הסטודנטים. אם הסטודנטים הם א', ב' ו- ג'. לחלק {א} {ב,ג} זה כמו {ב,ג} {א} אבל זה לא כמו {ב} {א,ג}.

לכל סטודנט יש 2 אפשרויות: להיות בקבוצה א' או בקבוצה ב' ולכן יש 2^n אפשרויות. אבל סדר הקבוצות לא משנה ולכן מס' האפשרויות הוא

$$2^n/_{2!} = 2^{n-1}$$

אם מחלקים לכיתות צריך להוריד אפשרות אחת (של קבוצה אחת ריקה ובשנייה יש את כולם) ולכן $2^{n-1} - 1$

תרגיל 5

במישור יש 10 נק' A,B,C.., כך שאין 3 נק' על אותו ישר

א. כמה קווים ישרים נוצרים בין כל הנקודות? (היזכרו ש"דרך כל 2 נק' עובר רק קו ישר אחד")

כל 2 נקודות שונות יתנו ישר ולכן $\binom{10}{2}$

ב. כמה ישרים יש שלא עוברים דרך A או B?

יש לנו פחות 2 נקודות לבחור מהם ולכן $\binom{8}{2}$

ג. כמה משולשים נוצרים?

כיוון שאין 3 נק' על אותו ישר, כל בחירה של 3 קדקודים שונים יתנו משולש ולכן $\binom{10}{3}$.

ד. כמה משולשים יש עם קודקוד A?

בוחרים את A, וכדי להשלים משולש נשאר לבחור 2 קדקודים $\binom{9}{2}$

ה. כמה משולשים יש עם הצלע AB?

הצלע נותנת 2 קדקודים. ולכן נשאר לבחור קדקוד אחד ולזה יש 8 אפשרויות.

תרגיל 6

תהי A קבוצה. $|A| = n$ כמה תתי קבוצות יש לA? (נמק!) אסור להשתמש במשפט על קב' החזקה)

זה כמו כמה אפשרויות יש לבחור/לבנות תת קבוצה. לכל איבר יש 2 אפשרויות: להיות בתת קבוצה או לא להיות. ולכן יש 2^n אפשרויות.

תרגיל 7

בדומינו כל אבן (לוחית) מורכבת מזוג מספרים בין 0 ל 6

א. כמה אבני דומינו שונות יש?

.28

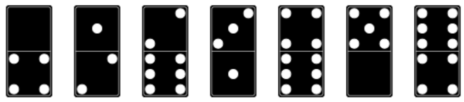
נספור לוחיות עם מספרים <u>שונים</u>: כביכול יש $7 \cdot 6$ זוגות, אבל הסדר לא משנה ולכן $7 \cdot 6/_2 = 21$. מס' לוחיות עם מס' <u>זהים</u> (דאבלים): 7

ולכן סה"כ יש $21 + 7 = 28$ סוגי דומינו.

ב. אם המס' היו בין 0-99, כמה אבני דומינו שונות היו?

כמו קודם. יש $100\cdot 99/_2 = 4950$ לוחיות עם מס' שונים ו100 דאבלים.

וסה"כ יש $4950 + 100 = 5050$ לוחיות.



(סדר המס' באבן לא משנה)

<u>תרגיל 8</u>

כמה מסלולים יש מראשית הצירים $(0,0)$ לנק' (n, m) ברביע הראשון, כאשר בכל צעד ניתן לנוע או למעלה או ימינה?

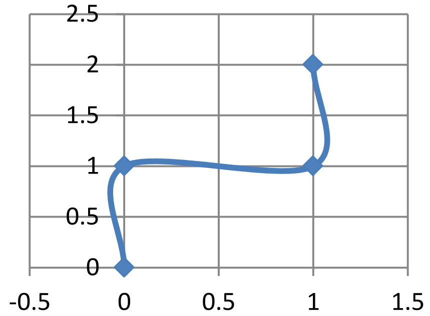
סה"כ נצטרך לעשות m צעדים למעלה וn צעדים ימינה.

כל צירוף כזה של צעדים יתן מסלול מתאים.

אם נסמן צעד ימינה ב r וצעד למעלה ב u, אז זה כמו לסדר בשורה $m + n$ צעדים. אבל הסדר הפנימי של r לא משנה (הם זהים) וכך גם של u.

ולכן מס' האפשרויות הוא: $\frac{(m+n)!}{m!\cdot n!}$

דוגמא



זה המסלול u, r, u

<u>תרגיל 9</u>

א. הוכח כי $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

ב. הוכח כי $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots \pm \binom{n}{n} = 0$

(רמז: פתח לפי הבינום של ניוטון את $(1+1)^n$ ואת $(1-1)^n$)

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots \pm \binom{n}{n}$$

בהצלחה!