תכונות של טורי חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

1. מגדירים R ע"י $1/R = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. "$R$" נקרא "רדיוס" ההתכנסות של הטור
2. הטור מתכנס בהחלט ב$B(z_0,R)$ ומתבדר ב $\overline{B(z_0,R)}^c$
3. אם $0<r<R$ הטור מתכנס במ"ש ב$B(z_0,r)$
4. אם $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ קיים אז הוא שווה לR
5. אם $R>0$ אז הטור מגדיר פונקציה אנליטית

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad z \in B(z_0,R)$$

ובפרט

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

עם אותו רדיוס התכנסות R.

6. לכל n, $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ ולכן הטור טור טיילור של f בz_0.

משפט 11

תהי $f(z)$ מוגדרת ואנליטית בעיגול $\overline{B(0,R)}$. אזי לכל $z \in B(0,R)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

ז.א. $f(z)$ שווה לטור מקלורן שלה.

מסקנה 1

במשפט 11 מספיק להניח ש$f \in H(B(z_0,R))$

מסקנה 2

אם

$$f \in H(B(z_0,R)) \qquad (R>0)$$

אז לכל $z \in B(z_0,R)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

ז.א. $f(z)$ שווה לטור טיילור שלה.

הערה

משפט 11 מאוד לא נכון לגבי פונקציות ממשיות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

למשל אם $f\left(x\right)=x^{4/3}$ אז לכל $x\in\mathbb{R}$ קיים $f'\left(x\right)=\frac{4}{3}x^{1/3}$ אבל $f''\left(x\right)=\frac{4}{9}x^{-2/3}$ - לא קיים באפס. לכן יש כאן פונקציה גזירה על כל $\mathbb{R}$ שלא נתין לבנות לה טור מקלורן כי $f''\left(0\right)$ לא קיים.

עוד דוגמה:

$$g\left(x\right)=\begin{cases}e^{-1/x^{2}} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

אפשר להוכיח ש$g\left(x\right)$ גזירה ∞ פעמים בכל $\mathbb{R}$ ובפרט

$$g\left(0\right)=g'\left(0\right)=g''\left(0\right)=\cdots=g^{\left(n\right)}\left(0\right)=\cdots=0$$

לכן טור מקלורן של g הוא

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{\left(n\right)}\left(0\right)}{n!}z^{n}=0$$

וזה לא מתכנס ל$g\left(x\right)$ ששונה מאפס לכל $x\neq0$.

משפט 12

תהי $f\left(z\right)$ מוגדרת ואנליטית בסביבה של z_{0}. אז בסביבה זו

$$f\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{\left(n\right)}\left(z_{0}\right)}{n!}\left(z-z_{0}\right)^{n}$$

רדיוס ההתכנסות של הטור הוא המספר המקסימלי R כך ש$f\left(z\right)$ ניתנת להמשכה כפונקציה אנליטית ב$B\left(z_{0},R\right)$.

הוכחה

כיוון ש$f\left(z\right)$ נמשכת אנליטית ל$B\left(z_{0},R\right)$, מסקנה 2 למשפט 11 אומרת שלכל $z\in B\left(z_{0},R\right)$

$$f\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{\left(n\right)}\left(z_{0}\right)}{n!}\left(z-z_{0}\right)^{n}$$

לכן אם S=רדיוס ההתכנסות של הטור, $S\geq R$.

אבל לא ייתכן ש$S>R$ כי אם כן הטור מגדיר פונקציה אנליטית ב$B\left(z_{0},S\right)$ שמתלכדת עם $f\left(z\right)$ בסביבת z_{0}. ז.א. הטור ממשיך את $f\left(z\right)$ באופן אנליטי לעיגול גדול מ$B\left(z_{0},R\right)$, בניגוד למקסימליות של R. המסקנה היא ש$S=R$. מ.ש.ל.

תרגיל(כעין תרגיל שהיה במבחן)

נגדיר

$$f\left(z\right)=\frac{\sin z}{z^{2}-2z+5}$$

נפתח את $f\left(z\right)$ לטור מהסוג

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}\left(z-1\right)^{n}$$

קבעו את רדיוס ההתכנסות של הטור.

תשובה

$f\left(z\right)$ אנליטית בכל $\mathbb{C}$ פרט לשתי נקודות שבהן המכנה מתאפס:

$$z=\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}=1\pm2i$$

המרחק מ1 ל$1\pm2i$ הוא 2, ולכן רדיוס ההתכנסות של הטור הוא 2 = המרחק לנקודה הסינגולרית הקרובה ביותר.

למה

תהי $f\in H\left(B\left(z_{0},R\right)\right)$ ונניח שלכל $n=0,1,2,\ldots$ $f^{(n)}=0$. אזי $f\left(z\right)\equiv0$ ב$B\left(z_{0},R\right)$

הוכחה

לפי מסקנה 2 למשפט 11 לכל $z\in B\left(z_{0},R\right)$

$$f\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(z_{0}\right)}{n!}\left(z-z_{0}\right)^{n}=0$$

מ.ש.ל.

משפט מטופולוגיה

יהי $D\subset\mathbb{C}$ קבוצה פתוחה. D קשירה אם ורק אם לכל חלוקה $D=O_{1}\uplus O_{2}$ כך שO_{1} וO_{2} פתוחות בהכרח אחת הקבוצות ריקה ואחת שווה לD.

משפט 13

יהי $D\subseteq\mathbb{C}$ תחום פתוח וקשיר, ותהי $f\in H\left(D\right)$. נניח שקיימת $z_{0}\in D$ כך ש

$$f^{(n)}\left(z_{0}\right)=0\qquad n=0,1,2,3,\ldots$$

אזי לכל $z\in D$, $f\left(z\right)=0$.

הוכחה

נגדיר:

$$O_1 = \left\{ z \in D \middle| \begin{array}{c} f^{(n)}(z) = 0 \\ n = 0,1,2,\ldots \end{array} \right\}$$

$$O_2 = D \backslash O_1$$

לכן

$$D = O_1 \uplus O_2$$

טענה 1: O_1 קבוצה פתוחה.

הוכחה: נניח שנקודה $z_1 \in O_1 \subset D$. כיוון שD פתוח קיים $r > 0$ כך ש$B(z_1, r) \subset D$. כיוון ש$z_1 \in O_1$, $f^{(n)}(z_1) = 0$ לכל n. לפי הלמה, $f(z) \equiv 0$ ב$B(z_1, r)$. לכן עבור כל $z_2 \in B(z_1, r)$ יש לz_2 סביבה שלימה שבה $f(z) \equiv 0$. נובע שלכל n, $f^{(n)}(z_2) = 0$. ז.א. $z_2 \in O_1$ עבור כל $z_2 \in B(z_1, r)$.

בזה הוכחנו שלכל $z_1 \in O_1$ יש סביבה שלימה שלה ששייכת כולה לO_1, לכן O_1 פתוחה.

טענה 2: O_2 פתוחה

הוכחה: ניקח $z_3 \in O_2$ כלשהו. כיוון ש$z_3 \in O_2$, קיים $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ כך ש$f^{(n)}(z_3) \neq 0$. אבל $f^{(n)}(z)$ פונקציה רציפה, וכיוון ש$f^{(n)}(z_3) \neq 0$ קיימת סביבה $B(z_3, r)$ שבה $f^{(n)}(z) \neq 0$. בפרט $B(z_3, r) \subset O_2$.

מצאנו שלכל $z_3 \in O_2$ יש סביבה שלימה שלה ששייכת כולה לO_2. ז.א. O_2 פתוחה.

בסיכום:

$$D = O_1 \uplus O_2$$

כאשר O_1 וO_2ד פתוחות, אבל D קשיר ולכן בהכרח אחת הקבוצות O_i ריקה. אבל נתון לנו ש$z_0 \in O_1$, לכן בהכרח $O_2 \neq \emptyset$ ו$O_1 = D$, לכן $f(z) = 0$ בD. מ.ש.ל.

משפט 14

יהי $D \subset \mathbb{C}$ תחום פתוח וקשיר. נניח ש$f \in H(D)$ ו$f(z) \not\equiv 0$ בD. עוד נניח שקיים $z_0 \in D$ כך ש$f(z_0) = 0$. אזי קיים $n \in \mathbb{N}$ ו$g \in H(D)$ כך ש$g(z_0) \neq 0$ ולכל $z \in D$, $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$.

g וn יחידים, "n" נקרא סדר האפס של f בz_0.

הוכחה

נתון ש$f(z) \not\equiv 0$ ולכן נובע ממשפט 13 שלא כל הנגזרות של f מתאפסות בz_0. לכן קיים n מינימלי כך ש$f^{(n)}(z_0) \neq 0$. ז.א.

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$$

$$f^{(n)}(z_0) \neq 0$$

כעת נפתח את f לטור טיילור סביב z_0.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k =$$

$$= \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}(z-z_0)^{n+1} + \cdots =$$

$$= (z-z_0)^n \left[\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}(z-z_0) + \frac{f^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!}(z-z_0)^2 + \dots\right]$$

כיוון ש$z_0 \in D$ וD פתוח, קיים $n > 0$ כך ש$B(z_0, r) \subset D$ וכיוון ש$f \in H(B(z_0, r))$, פיתוח טיילור שפיתחנו מתכנס ל$f(z)$ ב$B(z_0, r)$. בפרט הביטוי בסוגריים

$$\left[\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}(z-z_0) + \frac{f^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!}(z-z_0)^2 + \dots\right]$$

הוא טור חזקות שמתכנס ב$B(z_0, r)$. לפי משפט 10 הטור מתכנס לפונקציה אנליטית

$$g \in H(B(z_0, n))$$

ואם נציב $z = z_0$ נקבל

$$g(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \neq 0$$

לפי הבנייה.

בזה הגענו לפירוק הרצוי

$$f(z) = (z-z_0)^n g(z) \qquad z \in H(z_0, r)$$

כעת נרחיב את g לכל D ע"י ההגדרה

$$g(z) = \begin{cases} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^{k-n} & z \in B(z_0, r) \\ \mathrm{f(z)}/\mathrm{(z-z_0)^n} & z \in D \setminus \{z_0\} \end{cases}$$

g מוגדרת היטב ושייכת ל$H(D)$ כי בתחום המשותף של שתי ההגדרות, $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, שתי ההגדרות מתלכדות.

נשאר רק להוכיח את היחידות של הפירוק. לצורך זה נניח שיש שני פירוקים

$$f(z)=(z-z_0)^n g(z)=(z-z_0)^m h(z)$$

כאשר $m\in\mathbb{N}$, $h\in H(D)$, $h(z_0)\neq 0$.
נמשיך בדרך השלילה. תחילה נניח ש$n<m$. אז נחלק ב$(z-z_0)^n$ לקבל

$$g(z)=(z-z_0)^{m-n} h(z)$$

נציב $z=z_0$ להסיק

$$g(z_0)=(z-z_0)^{m-n} h(z_0)=0$$

בניגוד לנתונים של g.
כמו כן, אם נניח $m<n$ נסיק ש$h(z_0)\neq 0$ בניגוד לנתון.
לכן בהכרח $m=n$. אם כן, אז לכל $z_0\neq z\in D$ $h(z)=g(z)$, וכיוון שg וh רציפות,

$$g(z_0)=\lim_{z\to z_0} g(z)=\lim_{z\to z_0} h(z)=h(z_0)$$

ולכן $m=n$ ו$h=g$ והפירוק יחיד. מ.ש.ל.

מסקנה(מתוך ההוכחה)

בנתונים של משפט 14, "n"=סדר האפס של f בz_0 הוא המספר הטבעי המינימלי כך ש$f^{(n)}(z_0)\neq 0$.

דוגמת חישוב

נגדיר

$$f(z)=[\sin z-z]^3(1-\cos z)^4$$

מצאו את סדר האפס של $f(z)$ בנקודה $z=0$

פתרון

אם נגדיר $g(z)=\sin z-z$:

$$g(0)=0$$

$$g'(z)=\cos z-1 \qquad g'(0)=0$$

$$g''(z)=-\sin z \qquad g''(0)=0$$

$$g'''(z)=-\cos z \qquad g'''(0)\neq 0$$

אז ל$g(z)$ יש אפס מסדר 3 ב0, ולכן יש פירוק $g(z) = z^3 h(z)$ כאשר h אנליטית ב$\mathbb{C}$ ו$h(0) \neq 0$.

עוד נגדיר $k(z) = 1 - \cos z$

$$k'(z) = \sin z$$

$$k''(z) = \cos z$$

$$\Rightarrow k(0) = k'(0) = 0 \qquad k''(0) \neq 0$$

אז יש פירוק $k(z) = z^2 l(z)$, l שלימה, $l(0) \neq 0$.

נחזור לפונקציה המקורית:

$$f(z) = [\sin z - z]^3 (1 - \cos z)^4 = [g(z)]^3 [k(z)]^4 = \left[z^3 h(z)\right]^3 \left[z^2 l(z)\right]^4 = z^{17} [h(z)]^3 [l(z)]^4$$

$[h(z)]^3 [l(z)]^4$ היא פונקציה שלימה שלא מתאפסת באפס. המסקנה היא שלf קיים אפס סדר 17 באפס.

תרגיל נוסף

נגדיר

$$f(z) = [\sin z - z]^3 + [1 - \cos z]^4$$

f מתאפסת לסדר 8 באפס, כי עבור $k = 0, 1, 2, \ldots 7$, $f^{(k)}(0) = 0$ כי שני הביטויים מתאפסים עד סדר 7. בנגזרת השמינית נקבל

$$f^{(8)}(0) = \underbrace{\left\{[\sin z - z]^3\right\}^{(8)}(0)}_{=0} + \underbrace{\left\{[1 - \cos z]^4\right\}^{(8)}(0)}_{\neq 0} \neq 0$$

ולכן האפס מסדר 8!

למה

יהי $D \subset \mathbb{C}$ תחום פתוח וקשיר, ותהי $0 \not\equiv f \in H(D)$. אזי כל אפס של f בD מבודד, ז.א. אם $z_0 \in D$ ו$f(z_0) = 0$ אז קיים $n > 0$ כך שלכל $z \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, $f(z) \neq 0$.

הוכחה

אם $f(z_0) = 0$ אז לפי משפט 14 יש פירוק

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) \qquad g(z_0) \neq 0 \qquad g \in H(D)$$

כיוון שg רציפה בD ו$g(z_0) \neq 0$. אז קיים $r > 0$ כך שלכל $z \in B(z_0, r)$, $g(z) \neq 0$.

מלבד זאת הפונקציה $(z - z_0)^n$ מתאפסת אך ורק בנקודה z_0, ומזה נובע ש

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z)$$

שונה מאפס ב$B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. מ.ש.ל.

משפט 15(משפט היחידות לפונקציות אנליטיות)

יהי $D\subset\mathbb{C}$ תחום פתוח וקשיר ונניח ש$\{z_n\}$ סדרה בD שמתכנסת לנקודה $z_0\in D$. ז.א. $\lim\limits_{h\to\infty} z_n$. אזי:

1. אם $f\in H(D)$ ואם $f(z_n)=0$ לכל $n\in\mathbb{N}$ אז $f(z)\equiv 0$ בD.
2. אם $f,g\in H(D)$ ואם $f(z_n)=g(z_n)$ לכל $n\in\mathbb{N}$ אז $f(z)=g(z)$ לכל $z\in D$.

הוכחה

1. כיוון שלכל $n\in\mathbb{N}$ $f(z_n)=0$ וכיוון ש$z_n\to z_0$, הרציפות של f בz_0 נותנת

$$f(z_0)=\lim_{n\to\infty} f(z_n)=\lim_{n\to\infty} 0=0$$

נמצא ש״z_0״ הוא אפס לא מבודד של $f(z)$. לפי הלמה, זה ייתכן רק אם $f(z)\equiv 0$, והוכחנו את (1).

2. נגדיר $h(z)=f(z)-g(z)$. אז $h\in H(D)$. ללפי הנתון לכל $n\in\mathbb{N}$

$$h(z_n)=f(z_n)-g(z_n)=0$$

לפי חלק (1) $h(z)\equiv 0$ בD. ז.א. לכל $z\in D$

$$0=h(z)=f(z)-g(z)\Rightarrow f(z)=g(z)$$

מ.ש.ל.

מסקנה

אם $f,g\in H(D)$ ו$f(z)=g(z)$ ברצף של נקודות בD אז $f(z)=g(z)$ לכל $z\in D$.

הוכחה

רצף של נקודות מכיל הרבה סדרות עם גבול!

דוגמאות

1. נגדיר $z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, $f(z)=\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$. אם $n\in\mathbb{Z}$, $z_n=\dfrac{1}{n\pi}$

$$f(z_n)=\sin\left(\frac{1}{1/\mathrm{n}\pi}\right)=\sin n\pi=0$$

בסיכום יש כאן סדרה $\{z_n\} = \left\{\dfrac{1}{n\pi}\right\}$. קיים גבול $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ .0. $f(z_n) = 0$ לכל n ובכל זאת $f(z) \not\equiv 0$. זה לא סותר את משפט 15, כי במשפט 15 דורשים שנקודת הגבול $z_0 = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ אף היא בתחום האנליטיות של f, מה שאין כאן:

$$0 = \lim_{n\to\infty} z_n$$

אינו בתחום האנליטיות $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

2. משפט 15 מסביר את התופעה של "התמדת הזהויות" שפגשנו בקורס לשנו. למשל אם $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}$, מתקיים מטריגו

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

באינפי מרחיבים את הפונקציות הטריגונומטריות לכל $\theta \in \mathbb{R}$ ובקורס שלנו הרחבנו אותן לכל $z \in \mathbb{C}$ ומצאנו שגם כאן

$$\sin 2z = 2\sin z\cos z$$

לכל $z \in \mathbb{C}$. הדבר הזה מוכרח ע"פ משפט 15 כי אם נגדיר

$$f(z) = \sin 2z \qquad g(z) = 2\sin z\cos z$$

אז ידוע ש-f ו-g פונקציות שלמות, וידוע שבקטע ממשי $[0, \pi/4]$ $f(z) = g(z)$. בפרט הן מתכדות ברצף של נקודות. לכן ע"פ המסקנה למשפט 15 $f(z) = g(z)$ לכל $z \in \mathbb{C}$.

באופן דומה, ניתן להוכיח ולהכריח שלכל $z \in \mathbb{C}$,

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$e^{2z} = e^z e^z$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

וכו'.

נקודות סינגולריות מבודדות

הגדרה

סביבה מנוקבת של z_0 היא סביבה מהסוג

$$B(z_0, r)\setminus\{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} | 0 < |z - z_0| < r\}$$

הגדרה

תהי $f\left(z\right)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של z_0. נאמר שfל יש סינגולריות מבודדת בz_0 אם $f\left(z\right)$ אנליטית בסביבה מנוקבת של z_0 ולא בz_0 עצמה.

דוגמאות

1. לפונקציה $f\left(z\right)=\dfrac{1}{z}$ יש סינגולריות מבודדת באפס.
2.
3. הפונקציה $\mathrm{Log}z$ אנליטית ב$\mathbb{C}$ פרט לקרן השמאלית של ציר הx

$$\{x\in\mathbb{R}|x\leq 0\}$$

כאן נקודות הסינגולריות לא מבודדות כי הן רצף של נקודות.

4. $f\left(z\right)=\dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)}$. f אנליטית ב$\mathbb{C}$ פרט לנקודות $\dfrac{1}{n\pi}, n\in\mathbb{Z}$ והנקודה 0. הנקודות $\dfrac{1}{n\pi}$ מבודדות אבל 0 היא סינגולרית לא מבודדת כי כל סביבה של 0 מכילה עוד נקודות סינגולריות.