תרגיל בית 3 מבוא לתורת החבורות
88-211 סמסטר א' תשע"ז

21 בנובמבר 2016

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא בתרגול בשבוע המתחיל בתאריך ד' כסלו ה'תשע"ז, 4.12.2016.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבע האם היא נכונה ואם לא מצא דוגמא נגדית:

1. כל חבורה צקלית היא אבלית.
2. כל חבורה אבלית היא צקלית.
3. תת חבורה הנוצרת ע"י איבר אחד היא תמיד צקלית.
4. אם $o(a) = n$ אז $a^{-1} = a^{n-1}$.

שאלה 2. חשבו את סדר החבורות $U_{12}, U_{14}, H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$.

שאלה 3. רשמו את לוחות הכפל של U_5, U_{12}.

שאלות להגשה

שאלה 4. פתרו את המשוואות הבאות:

1. $22x = 1$ ב$\mathbb{Z}_{117}$.
2. $-11x + 2 = 19$ ב$\mathbb{Z}_{24}$.

שאלה 5. תהי G חבורה ויהיו $a, b \in G$ איברים. הוכיחו כי $o(ab) = o(ba)$.
היזהרו: לא הנחנו שהחבורה אבלית!

שאלה 6. תהי $G = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ חבורה אבלית. נסמן $b = a_1 a_2 \cdots a_n$.
הוכיחו כי $b^2 = e$.

שאלה 7. הוכיחו כי $U_{12} \ncong \mathbb{Z}_4$ (העזרו בסדר של איברים).

שאלה 8. בשאלה הקודמת ראינו שסדר האיברים יכול להראות לנו שחבורות הן לא איזומורפיות.
כעת נראה שההפך לא נכון, יש חבורות עם איברים באותם סדרים שהן לא איזומורפיות.

1. הוכיחו כי בחבורה הבאה, הנקראת חבורת הייזנברג מעל $\mathbb{Z}_3$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,|\, a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\} \leq GL_3(\mathbb{Z}_3)$$

כל האיברים (פרט ליחידה) הם מסדר 3.

2. הוכיחו כי ב$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ כל האיברים (פרט ליחידה) הם מסדר 3.

3. הראו כי $H \ncong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

שאלה 9. היזכרו בשאלה 5 של תרגיל בית 1, הוכיחו כי בחבורה מסדר זוגי מספר האיברים מסדר 2 הוא אי-זוגי.

שאלות אתגר

את שאלות האתגר אין חובה לפתור, אך מומלץ לפחות לקרוא. אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 10. תהי G חבורה לא טריוויאלית, הוכיחו כי

$$G^{\infty} = \{(g_1, g_2, g_3, \ldots) \,|\, g_i \in G,\ g_i = e \text{ except for finite number of i's}\}$$

היא חבורה (ביחס לפעולה איבר-איבר) אינסופית.
בעזרת בנייה זו, מצאו חבורה אינסופית שכל איבר בה הוא מסדר סופי.
יותר מזה: בחרו מספר $2 \leq n$ ובנו חבורה אינסופית שבה כל איבר הוא מסדר לכל היותר n.

שאלה 11. תהי G חבורה סופית. הוכיחו כי מספר האיברים מסדר 3 הוא זוגי (אולי 0).
מה לגבי מספר האיברים מסדר p כאשר p מספר ראשוני אי-זוגי?

בהצלחה!