אנליזה מודרנית תש"ף - תרגול 8

18 בדצמבר 2019

משפט (משפט הגזירה של לבג): תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית עולה. אז f גזירה כמעט בכל מקום, $f'(x)\geq 0$, ומתקיים

$$\int_a^b f'(x)\,dm\leq f(b)-f(a)$$

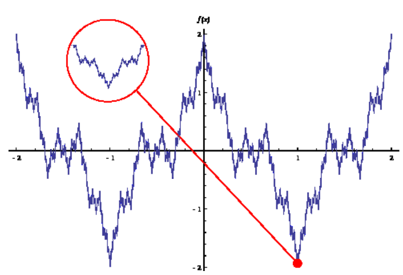
תרגיל: תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. האם בהכרח קיים קטע בו f מונוטונית?

פתרון: לא. ידוע לנו שקיימות פונקציות רציפות שאינן גזירות באף נקודה, למשל נוכל לקחת את f להיות פונקצית ויירשטראס. אילו היה קטע $[a,b]$ בו f הייתה מונוטונית, אז ממשפט הגזירה של לבג f הייתה גזירה כמעט בכל מקום בקטע, בסתירה.

הערה: תהי f פונקציה בעלת השתנות חסומה. אז

- ל־f אין נקודות אי־רציפות מסוג שני.
- מספר נקודות אי־הרציפות של f הוא לכל היותר בן־מניה.

הסבר: ראינו בהרצאה שכל פונקציה בעלת השתנות חסומה f, ניתן להציג כהפרש של שתי פונקציות מונוטוניות עולות $g-h$. ידוע לנו כי עבור פונקציות מונוטוניות, הגבולות החד־צדדיים קיימים לכל נקודה ולכן אין אי־רציפות מסוג שני. מאריתמטיקה של גבולות נקבל שגם ל־f אין אי־רציפות מסוג שני. באופן דומה, לפונקציה מונוטונית יש לכל היותר מספר בן־מניה של נקודות אי־רציפות, ולכן כך גם ל־f.



איור 1: פונקציית ויירשטראס

משפט (הכללת לבג למשפט היסודי, חלק א'): תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית. נגדיר $F(x)=\int_a^x f(x)\,dm$ לכל $x\in[a,b]$. אז F רציפה בהחלט ב־$[a,b]$, וכמעט בכל מקום הנגזרת $F'(x)$ קיימת ושווה ל־$f(x)$.

תרגיל: תהי $E\in\mathbb{R}$ קבוצה מדידה לבג. הוכיחו שלכמעט כל $a\in E$ מתקיים

$$\lim_{h\to0^+}\frac{1}{2h}\int_{a-h}^{a+h}\mathbb{1}_E dm=1$$

פתרון: לכל n טבעי נגדיר פונקציה $F_n(x)=\int_n^x\mathbb{1}_E dm$, לכל $x\in[n,n+1]$. לפי הכללת לבג למשפט היסודי (חלק א'), F_n גזירה כמעט בכל מקום, ו־$F_n'(x)=\mathbb{1}_E(x)$ כמעט לכל $x\in[n,n+1]$. נסמן $D_n=\{x\in E\cap[n,n+1]\mid F_n'(x)\neq\mathbb{1}_E(x)\}$. זו קבוצת הנקודות שלא תקיימנה את השוויון הדרוש בקטע. כמובן ש־$m(D_n)=0$. כעת עבור כמעט כל $a\in E\cap[n,n+1]$ מתקיים $F_n'(a)=\mathbb{1}_E(a)=1$, כאשר

$$F_n'(a)=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{2}\left(\frac{F_n(a+h)-F_n(a)}{h}+\frac{F_n(a)-F_n(a-h)}{h}\right)$$

$$=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{2h}\left(F_n(a+h)-F_n(a-h)\right)$$

$$=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{2h}\left(\int_n^{a+h}\mathbb{1}_E dm-\int_n^{a-h}\mathbb{1}_E dm\right)$$

$$=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{2h}\left(\int_{a-h}^{a+h}\mathbb{1}_E dm\right)$$

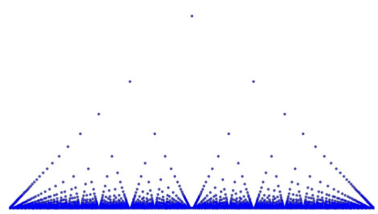
כלומר קיבלנו את השוויון הדרוש לכמעט כל $a\in E\cap[n,n+1]$. נשים לב ש־$a\in E$ לא מקיים את השווין אם קיים n כך ש־$a\in D_n$, כלומר $a\in\bigcup_n D_n$. אבל מ־σ־אדיטיביות נקבל כי $m\left(\bigcup_n D_n\right)=0$, לכן השוויון נכון לכמעט כל $a\in E$.

משפט (הכללת לבג למשפט היסודי, חלק ב'): תהי f פונקציה מוגדרת ורציפה בהחלט בקטע $[a,b]$. אז הנגזרת f' קיימת כמעט בכל מקום ב־ $[a,b]$ ואינטגרבילית שם, ומתקיים

$$\int_a^b f'(x)\,dm=f(b)-f(a)$$

תרגיל: תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

1. f רציפה בהחלט, $f'(x)\in\{0,1\}$ כמעט בכל מקום וכן $f(0)=0$.
2. קיימת קבוצה $A\subseteq[0,1]$ מדידה כך שמתקיים $f(x)=m(A\cap(0,x))$.



איור 2: פונקציית רימן

הוכחה: נניח כי f רציפה בהחלט, $f'(x) \in \{0,1\}$ כמעט בכל מקום וכן $f(0)=0$. נגדיר $A=\{x\in[0,1] \mid f'(x)=1\}$. f רציפה בהחלט ולכן רציפה ובפרט מדידה. לכן גם הנגזרת f' מדידה, ומכאן שהקבוצה A מדידה. כיוון ש־f רציפה בהחלט, מהכללת לבג למשפט היסודי (חלק ב') נקבל

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'dm=\int_0^x f'dm=\int_0^x \mathbb{1}_A dm=\int_0^1 \mathbb{1}_{A\cap(0,x)}dm=m(A\cap(0,x))$$

כעת נניח שקיימת קבוצה $A\subseteq[0,1]$ מדידה כך שמתקיים $f(x)=m(A\cap(0,x))$. אז ממה שהוכחנו קודם נקבל $f(x)=\int_0^x \mathbb{1}_A dm$. לפי הכללת לבג למשפט היסודי (חלק א'), f רציפה בהחלט, וכמעט בכל מקום $f'(x)=\mathbb{1}_A(x)$. לכן כמעט בכל מקום $f'(x)\in\{0,1\}$. קל לראות בנוסף כי $f(0)=0$ (מידה של נקודון היא 0).

משפט (לבג): פונקציה חסומה ומדידה בורל $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ היא אינטגרבילית רימן אם ורק אם f רציפה כמעט בכל מקום. במקרה זה, f אינטגרבילית לבג, ואינטגרל רימן שלה שווה לאינטגרל לבג בקטע $[a,b]$.

דוגמה: נתבונן בפונקצית דיריכלה $f=\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ בקטע $[0,1]$. אז f לא רציפה באף נקודה, ולכן לא אינטגרבילית רימן. מצד שני ראינו כי f אינטגרבילית לבג, ו־$\int_{[0,1]} fdm=0$.

דוגמה: נגדיר בקטע $[0,1]$ את הפונקציה $f=\begin{cases}\frac{1}{q} & x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$, כאשר השבר מצומצם.
פונקציה זו נקראת פונקצית רימן, או פונקצית הפופקורן. f רציפה בנקודות אי־רציונליות, ולא רציפה בנקודות רציונליות. לכן f רציפה כמעט בכל מקום, ולפי משפט לבג היא אינטגרבילית רימן. כמן כן אינטגרל רימן שווה לאינטגרל לבג בקטע, ואפשר לראות כי $\int_{[0,1]} fdm=0$.

דוגמה: משפט ההתכנסות המונוטונית ומשפט ההתכנסות הנשלטת לא תקפים באופן כללי עבור אינטגרל רימן. למשל תהי $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ מניה של $\mathbb{Q}$. נגדיר סדרת פונקציות לפי $f_n=\mathbb{1}_{\{q_1,\dots q_n\}}$. זו סדרה מונוטונית עולה. לכל n, f_n רציפה כמעט בכל מקום, לכן אינטגרל רימן של f_n קיים, ושווה לאינטגרל לבג שהוא 0. מצד שני, $f_n\to\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, אבל פונקציית דיריכלה היא לא אינטגרבילית רימן. לכן משפט ההתכנסות המונוטונית לא תקף.