משפט

תהי $x_{n+1} = g\left(x_n\right)$ נוסחת איטרציה המתכנסת לשורש z המקיים $z = g\left(z\right)$.
נתון $g\left(x\right)$ גזירה p פעמים בסביבת z, $g'\left(z\right) = g''\left(z\right) = \cdots = g^{(p-1)}\left(z\right) = 0$ ו$g^{(p)}\left(p\right) \neq 0$

אזי עבור x_0 בקירוב לz סדר ההתכנסות הוא p ושיעור ההתכנסות הוא $C = \dfrac{g^{(p)}\left(z\right)}{p!}$.

הוכחה

נפתח טור טיילור:

$$g\left(x_n\right) = g\left(z\right) + \left(x_n - z\right)g'\left(z\right) + \cdots + \frac{\left(x_n - z\right)^{p-1} g^{(p-1)}\left(z\right)}{(p-1)!} + \frac{\left(x_n - z\right)^p g^{(p)}\left(\xi\right)}{p!} \qquad \xi \in \left[x_n, z\right]$$

$$x_{n+1} - z = \cancel{\left(x_n - z\right)g'\left(z\right)} + \cdots + \cancel{\frac{\left(x_n - z\right)^{p-1} g^{(p-1)}\left(z\right)}{(p-1)!}} + \frac{\left(x_n - z\right)^p g^{(p)}\left(\xi\right)}{p!}$$

$$x_{n+1} - z = \frac{\left(x_n - z\right)^p g^{(p)}\left(\xi\right)}{p!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|x_{n+1} - z\right|}{\left|x_n - z\right|^p} = \frac{g^{(p)}\left(z\right)}{p!} = C$$

דוגמה

$$f\left(x\right) = x^3 + 2x - 3$$

נתונות 3 נוסחאות אפשריות:

$$1. \qquad x_{n+1} = \frac{3 - 2x_n}{x_n^2}$$

$$2. \qquad x_{n+1} = \frac{3 - x_n^3}{2}$$

$$3. \qquad \frac{2x_n^3 + 3}{3x_n^2 + 2}$$

עבור הנוסחאות המתכנסות, מצא סדר ושיעור התכנסות

פתרון

נבדוק קודם איזה מהן מתכנסות

.1

$$g'(x) = \frac{-2x^2 - 2x(3-2x)}{x^4} = \frac{2x^2 - 6x}{x^4} \qquad |g'(1)| = 4 > 1$$

.2

$$g'(x) = \frac{-3x^2}{2} \qquad |g'(1)| = 1.5 > 1$$

.3

$$g'(x) = \frac{6x^2\left(3x^2+2\right) - 6x\left(2x^3+3\right)}{\left(3x^2+2\right)^2} = \frac{6x^4 + 12x^2 - 18x}{\left(3x^2+2\right)^2} \qquad g'(1) = 0$$

רק השלישית מתכנסת. נגזור אותה עוד פעמים כדי למצוא את p:

$$\dots$$

ריבוי שורשים

עבור פונקציה $P(x)$, α נקרא שורש בריבוי k אם:

- $P(\alpha) = 0$
- קיימת פונקציה $h(x)$ כך ש$h(\alpha) \neq 0$ ו$P(x) = (x-\alpha)^k \cdot h(x)$

משפט

עבור פונקציה $P(x)$ וα שורש מריבוי k:

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$$

$$p^{(k)}(\alpha) \neq 0$$

שורש פשוט בשיטת ניוטון

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

נבדוק התכנסות:

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x) \cdot f'(x) - f''(x) \cdot f(x)}{(f'(x))^2} = \frac{\cancel{(f'(x))^2} - \cancel{(f'(x))^2} + f''(x) \cdot f(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f''(x) \cdot f(x)}{(f'(x))^2}$$

שורש לא פשוט בשיטת ניוטון

$$f(x) = (x-z)^k h(x)$$

$$f'(x) = k(x-z)^{k-1} h(x) + (x-z)^k h'(x)$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{(x-z)^k h(x)}{k(x-z)^{k-1} h(x) + h'(x)(x-z)^k} =$$

$$= \frac{\cancel{(x-z)^{k-1}}(x-z)h(x)}{\cancel{(x-z)^{k-1}}(k \cdot h(x) + h'(x)(x-z))} = x - (x-z)\frac{h(x)}{k \cdot h(x) + h'(x)(x-z)}$$

$$g'(x) = 1 - \frac{h(x)}{k \cdot h(x) + h'(x)(x-z)} + (x-z)\left(\frac{h(x)}{k \cdot h(x) + h'(x)(x-z)}\right)'$$

$$g'(z) = 1 - \frac{\cancel{h(z)}}{k \cdot \cancel{h(z)}} = 1 - \frac{1}{k}$$

מסקנה

עבור שורש לא פשוט יש לנו בעיה.

הצעה לתיקון

נשתמש בנוסחה

$$x_{n+1} = x_n - k \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\phi(x) = f(x)^{\frac{1}{k}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\phi(x_n)}{\phi'(x_n)}$$

השיטה הזו עובדת - אבל בד"ך לא יודעים את k כל כך בקלות.

תיקון אחר

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{u(x)}{u'(x)}$$

היתרון כאן שלא צריך לדעת את הריבוי של השורש. החיסרון הוא שצריך לעשות עוד נגזרת.

המקרה הרב מימדי - חישוב מערכת משוואות

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots x_m) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots x_m) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots x_m) = 0 \end{cases}$$

שיטת ניוטון במקרה הרב מימדי:

במקום

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

נכתוב

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - J(\vec{x}_n)^{-1} \cdot \vec{f}(\vec{x}_n)$$

כאשר J מטריצת היעקוביאן: עבור n פונקציות וm משתנים

$$J(\vec{x}_n) = (i,j) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) \in M_{n\times m}$$

דוגמה

$$f(x,y)=\left\{\begin{array}{c} 4x^2-y^2+2 \\ x^2-4y-6 \end{array}\right.$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$J=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8x & -2y \\ 2x & 4 \end{bmatrix}$$

$$J(\vec{x}_0)=\begin{bmatrix} -8 & -4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad J^{-1}(\vec{x}_0)=\frac{1}{40}\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0.1 & -0.1 \\ -0.05 & -0.2 \end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -0.1 & -0.1 \\ -0.05 & 0.2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

ייעול

הבעיה בשיטה הזו היא שצריך להפוך מטריצה, שזו פעולה מאוד יקרה. אבל אפשר גם לעקוף את זה:

$$\vec{\Delta}_n=\vec{x}_n-\vec{x}_{n+1}$$

$$\vec{x}_{n+1}=\vec{x}_n-J^{-1}\left(\vec{x}_n^{-1}\right)\cdot\vec{f}(\vec{x}_n)$$

$$\vec{x}_n-\vec{x}_{n+1}=J(\vec{x}_n)^{-1}\cdot\vec{f}(\vec{x}_n)$$

$$\vec{\Delta}_n=J(\vec{x}_n)\cdot\vec{f}(\vec{x}_n)$$

$$\boxed{J(\vec{x}_n)\,\vec{\Delta}_n=\vec{f}(\vec{x}_n)}$$

עכשיו צריך פשוט לפתור מערכת משוואות:

$$\boxed{A\vec{x}=\vec{b}}$$

שיטת אורנר

$$P\left(x\right)=a_0+a_1x+x_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

הייצוג הזה שקול ל

$$P\left(x\right)=a_0+x\left(a_1+x\left(a_2+\ldots x\left(a_{n-1}+a_nx\right)\right)\ldots\right)$$

(עבור aים אחרים כמובן)

דוגמה

$$P\left(x\right)=5x^4-2x^3+3x-3$$

$$P\left(x\right)=-3+x\left(3+x\left(0+x\left(-2+5x\right)\right)\right)$$

נגדיר

$$b_n=a_n$$

$$\forall_{k\in[n-1,0]}b_k=a_k+z\cdot b_{k+1}$$

$$b_0=P\left(z\right)$$

$$q\left(x\right)=b_1+b_2x+\ldots b_nx^{n-1}$$

טענה

$$P\left(x\right)=b_0+\left(x-z\right)q\left(x\right)$$

הוכחה

$$P\left(x\right)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

$$a_n=b_n$$

$$a_k=b_k-z\cdot b_{k+1}$$

$$P\left(x\right)=b_nx^n+\left(b_{n-1}-z\cdot b_n\right)\cdot x^{n-1}+\cdots+\left(b_1-z\cdot b_2\right)x+\left(b_0-z\cdot b_1\right)=$$

$$=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}-z\cdot b_nx^{n-1}+\cdots+b_1x-z\cdot b_2x+b_0-z\cdot b_1=$$

$$=\left(x-z\right)b_nx^{n-1}+\cdots+\left(x-z\right)b_1+b_0=b_0+\left(x-z\right)\left(b_nx^{n-1}+\cdots+b_1\right)$$

תוצאה

$$P'\left(x\right)=q\left(x\right)+\left(x-z\right)q'\left(x\right)$$

$$P'\left(z\right)=q\left(z\right)$$

האלגוריתם

$b_n=c_n=a_n$
for $k\leftarrow n-1$ to 1

  $b_k\leftarrow a_k+z\cdot b_{k+1}$
  $c_k\leftarrow b_k+z\cdot c_{k+1}$

$b_0\leftarrow a_0+z\cdot b_1$
$P\left(z\right)=b_0$
$P'\left(z\right)=c_1$

דוגמה

$$a_0 = 2 \qquad a_1 = 1 \qquad a_2 = 0 \qquad a_3 = -2 \qquad a_4 = 3$$

$$b_4 = c_4 = 3$$

$$b_3 = -2 + 2 \cdot 3 = 4$$

$$c_3 = 4 + 2 \cdot 3 = 10$$

$$b_2 = 8$$

$$c_2 = 8 + 2 \cdot 10 = 28$$