תרגיל בית 2 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשע"ט

שאלה 1. יהיו $n, m \in \mathbb{Z}$. הוכיחו כי $m\mathbb{Z} \leq n\mathbb{Z}$ אם ורק אם $n|m$.

שאלה 2. תהי קבוצה $S = \{a, b\}$. רשמו לוחות כפל עם פעולה $*$ כך שהמערכת האלגברית $(S, *)$ היא:

א. אגודה שאינה מונואיד.

ב. מונואיד שאינו חבורה.

ג. חבורה. למה בהכרח מתקבלת חבורה חילופית?

שאלה 3. בכל סעיף, קבעו האם תת־הקבוצה הנתונה היא תת־חבורה:

א. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ (עם חיבור רגיל).

ב. $8\mathbb{Z}_{12} = \{8k \,|\, k \in \mathbb{Z}_{12}\} \subseteq \mathbb{Z}_{12}$.

ג. $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\} \subseteq GL_3\left(\mathbb{Z}_p\right)$. תזכורת: $GL_3\left(\mathbb{Z}_p\right)$ היא חבורת המטריצות ההפיכות בגודל 3×3 מעל השדה $\mathbb{Z}_p$, עם הפעולה של כפל מטריצות.

ד. $\{A \in M_n(\mathbb{Q}) \,|\, \det A = 0\} \subseteq M_n(\mathbb{Q})$.

ה. $O_n(\mathbb{R}) = \left\{ A \in GL_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, A^T = A^{-1} \right\} \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ המטריצות האורתוגונליות.

ו. $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ הפיכה}, f(1) > 0\} \subseteq \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ הפיכה}\}$.

ז. $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ הפיכה}, f(1) = 1\} \subseteq \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ הפיכה}\}$.

(בשני הסעיפים האחרונים הפעולה היא הרכבת פונקציות).

שאלה 4. תהי G חבורה, ויהיו $H, K \leq G$ תת־חבורות של G. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $H \cap K$ היא תת־חבורה של G.

ב. $H \cup K$ היא תת־חבורה של G.

ג. $\Delta_H = \{(h, h) \,|\, h \in H\}$ היא תת־חבורה של $G \times G$.

שאלה 5. תהי G חבורה, ויהיו $a, b \in G$. הוכיחו או הפריכו את כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $o(a), o(b) < \infty$, אזי $o(ab) < \infty$ וכן $o(ab) = o(a)\, o(b)$.

ב. $o(ab) = o(ba)$ (גם אם הסדר אינסופי).

שאלה 6 (חזרה)**.** תהי S אגודה ו-$a \in S$ איבר. נגדיר את פעולת החזקה לפי $a^1 = a$, ולכל $n > 1$ נגדיר $a^{n+1} = a^n \cdot a$. הוכיחו כי מתקיים:

א. $a^n a^m = a^{n+m}$ לכל $n, m \in \mathbb{N}$.

ב. $(a^n)^m = a^{nm}$ לכל $n, m \in \mathbb{N}$.

ג. נניח כי S היא חבורה עם איבר יחידה e ונרחיב את ההגדרה לכל חזקה שלמה לפי $a^0 = e$ ו-$a^{-n} = \left(a^{-1}\right)^n$. הוכיחו כי $(a_1 \dots a_k)^{-1} = a_k^{-1} \dots a_1^{-1}$ לכל $a_1, \dots, a_k \in S$. הסיקו כי $(a^n)^{-1} = \left(a^{-1}\right)^n$ לכל $n \in \mathbb{Z}$.

שאלה 7 (רשות)**.** מצאו חבורה אינסופית שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים בה איבר מסדר n. האם אתם יכולים גם להבטיח שהסדר של כל האיברים הוא סופי?

כמו כן, לכל $m > 1$ מצאו חבורה אינסופית G_m שהסדר של כל איבר בה הוא לכל היותר m.

האם אתם יכולים למצוא דוגמאות לשאלות האלו כך שהחבורות הן מעוצמה $\aleph_0$?

בהצלחה!