26.7.2021

יחס המכפלה, היחס המילוני וחסמים

1. הגדרה (יחס המכפלה, היחס המילוני.): יהיו $(A, \leq_A), (B, \leq_B)$ שני קס"חים. נוכל להגדיר יחסי סדר על $A \times B$:

- יחס המכפלה, שנסמנו $\leq$ (השוואה רכיב-רכיב):

$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \iff (a_1 \leq_A a_2) \wedge (b_1 \leq_B b_2)$$

- היחס המילוני שנסמנו $\leq_{lex}$:

$$(a_1, b_1) \leq_{lex} (a_2, b_2) \iff (a_1 <_A a_2) \vee ((a_1 = a_2) \wedge (b_1 \leq_B b_2))$$

כאשר $a_1 <_A a_2$ פירושו $a_1 \leq_A a_2$ וגם $a_1 \neq a_2$.

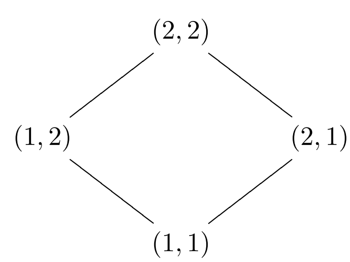
(א) הערה (מוזמנים להוכיח בבית): אם $(A, \leq_A), (B, \leq_B)$ קס"חים משווים/מלאים אזי גם היחס המילוני על $A \times B$.

(ב) דוגמה: $A = \{1, 2\}$ עם קטן שווה "הרגיל" ו $B = \{1, 2\}$ עם קטן שווה "הרגיל". ציירו דיאגרמת הסה של הקבוצה

$$A \times B = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

עם כל אחד מהיחסים הנ"ל

- יחס המכפלה



- היחס המילוני

$$\begin{tikzcd}[arrows=-]
(2,2) \arrow[d] \\
(2,1) \arrow[d] \\
(1,2) \arrow[d] \\
(1,1)
\end{tikzcd}$$

2. תזכורת: תהא $(A, \leq)$ קס"ח. עבור $B \subseteq A$

- מגדירים $\sup B$ (החסם העליון של B) להיות החסם מלעיל הקטן ביותר של B.
- מגדירים $\inf B$ (החסם התחתון של B) להיות החסם מלרע הגדול ביותר של B.

3. נסתכל על $(\mathbb{N}, \leq)$ (הטבעיים עם קטן שווה הרגיל) ועוד $(\mathbb{N}, \leq)$. נסתכל על $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ותתי הקבוצות

$$B_1 = \{(4, x) \,|\, x \in \mathbb{N}\}$$
$$B_2 = \{(x, 4) \,|\, x \in \mathbb{N}\}$$

(א) מצאו $\inf, \sup$ לקבוצות B_1, B_2 עם יחס המילוני.

פתרון:

- טענה: $\inf B_1 = (4, 1)$

הוכחה:

– (חסם מלרע) כל איבר ב B_1 הוא מהצורה $(4, x)$ ל x טבעי כל שהוא. ומכיוון ש $4 = 4, 1 \leq x$ נקבל ש $(4, 1) \leq_{lex} (4, x)$

– (חסם מלרע הגדול ביותר): נניח (a, b) חסם מלרע של B_1 צ"ל $(a, b) \leq_{lex} (4, 1)$. כיוון ש $(4, 1) \in B_1$ ו (a, b) חסם מלרע של B_1 נקבל שאכן $(a, b) \leq_{lex} (4, 1)$

- טענה $\sup B_1 = (5, 1)$

הוכחה:

– (חסם מלעיל) כל איבר ב B_1 הוא מהצורה $(4, x)$ ל x טבעי כל שהוא. ומכיוון ש $4 < 5$ נקבל ש $(4, x) \leq_{lex} (5, 1)$

– (חסם מלעיל הקטן ביותר): נניח (a, b) חסם מלעיל של B_1 ונוכיח כי

$(a,b) \leq_{lex} (5,1)$. מהגדרת חסם מלעיל, נקבל שלכל x טבעי

$$(4,x) \leq_{lex} (a,b)$$

ומכאן ש: אם $a=4$ נקבל כי $x \leq b$ לכל x טבעי. כמובן שזה לא אפשרי, למשל עבור $x=b+1$ והגענו לסתירה.
אחרת (שזה חייב להתקיים) $4<a$. אם $5<a$ נקבל כי $(5,1) \leq_{lex} (a,b)$. אחרת $a=5$ ואז, כיוון ש $1 \leq b$ נקבל $(5,1) \leq_{lex} (a,b)$.

- תעשו לבד עם B_2

(ב) מצאו $\inf, \sup$ לקבוצות B_1, B_2 עם יחס המכפלה.
פתרון:

- טענה: $\inf B_1 = (4,1)$
הוכחה:
  - (חסם מלרע) כל איבר ב B_1 הוא מהצורה $(4,x)$ ל x טבעי כל שהוא. ומכיוון ש $4 \leq 4, 1 \leq x$ נקבל ש $(4,1) \leq (4,x)$
  - (חסם מלרע הגדול ביותר): נניח (a,b) חסם מלרע של B_1 צ"ל $(a,b) \leq (4,1)$. כיוון ש $(4,1) \in B_1$ ו (a,b) חסם מלרע של B_1 נקבל שאכן $(a,b) \leq (4,1)$
- טענה: אין $\sup B_1$: הוכחה: נב"ש שקיים $\sup B_1$, נסמנו (a,b). מהגדרת sup נקבל ש (a,b)חסם מלעיל של B_1. לכן, לכל x טבעי מתקיים

$$(4,x) \leq (a,b)$$

זה אומר ש $4 \leq a$ וגם $x \leq b$ (לכל x טבעי). אבל עבור $x=b+1$ מתקיים $(4,x) \not\leq (a,b)$. סתירה.

- טענה: $\inf B_2 = (1,4)$ בדומה ל $\inf B_1$
- טענה: אין $\sup B_2$ - בדומה לשאין $\sup B_1$

פונקציות.

1. תרגיל: מצאו את כל הפונקציות מ $\{1,2,3\}$ ל $\{0,1\}$ (כל פונקציה היא יחס שמוכל ב $\{1,2,3\} \times \{0,1\}$).

פתרון: נסמן את קבוצת כל הפונקציות $\{f_0, f_1, \ldots, f_7\}$

$$f_0 = \{(1,0), (2,0), (3,0)\}$$
$$f_1 = \{(1,0), (2,0), (3,1)\}$$
$$f_2 = \{(1,0), (2,1), (3,0)\}$$
$$f_3 = \{(1,0), (2,1), (3,1)\}$$
$$f_4 = \{(1,1), (2,0), (3,0)\}$$
$$f_5 = \{(1,1), (2,0), (3,1)\}$$
$$f_6 = \{(1,1), (2,1), (3,0)\}$$
$$f_7 = \{(1,1), (2,1), (3,1)\}$$

(א) סימון : הקבוצה הזאת מסומנת - $\{0,1\}^{\{1,2,3\}}$ כלומר $\{0,1\}^{\{1,2,3\}} = \{f_0, f_1, \ldots, f_7\}$.
גודל הקבוצה הוא $2^3 = 8$

(ב) באופן כללי: בהינתן A, B קבוצות, נסמן A^B להיות קבוצת כל הפונקציות מ B ל A (כלומר כל פונקציה $f : B \to A$) והגודל $\left|A^B\right| = |A|^{|B|}$ (במקרה הסופי אפשר להוכיח/להשתכנע. במקרה הלא סופי - ספוילר: זאת תהיה ההגדרה..).

(ג) עוד **סימונים**: את f_3 ניתן להגדיר גם $f_3 : \{1,2,3\} \to \{0,1\}$ המוגדרת $f_3(x) = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$. או בצורה מפורשת $f_3(1) = 0, f_3(2) = 1, f_3(3) = 1$.
ואפילו אם לא רוצים לסמן f_3 אפשר להגדיר את הפונקציה הזאת כך : $x \mapsto \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$
(שזה אומר $\left\{ \left(x, \lfloor \frac{x}{2} \rfloor\right) \mid x \in \{1,2,3\} \right\}$ או בצורה מפורשת

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 0 \\ 2 &\mapsto 1 \\ 3 &\mapsto 1 \end{aligned}$$

2. מינוחים: עבור פונקציה $f : A \to B$ שמקיימת $f(x) = y$. נאמר שהתחום של f זה A והטווח של f הוא B. x הוא המקור של y. y הוא התמונה של x.

3. קבעו האם הפונקציות הבאות חח"ע? האם על?

(א) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י הכלל $f(x) = \sin(x)$.
פתרון: לא חח"ע כי $f(\pi) = 0 = f(0)$ אבל $\pi \neq 0$. לא על: ל 2 אין מקור (כי לכל x ממשי מתקיים $-1 \leq \sin(x) \leq 1$).

(ב) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י הכלל $f(x) = x^3$.
פתרון: היא חח"ע (תוכיחו). היא על (תוכיחו)

(ג) $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ המוגדרת ע"י הכלל $f(x)=x^2$.

פתרון: לא חח"ע כי $f(1)=f(-1)$ אבל $-1\neq 1$. היא כן על: כי לכל מספר מרוכב יש שורש (כלומר לכל מספר מרוכב w ניתן למצוא מספר מרוכב z כך ש $z^2=w$).

(ד) תהא X קבוצה ו A תת קבוצה של X. פונקצית ההכלה $f:A\to X$ מוגדרת ע"י הכלל $f(a)=a$.

פתרון: היא חח"ע. הוכחה: נניח $f(a_1)=f(a_2)$ צ"ל $a_1=a_2$. זה מתקיים מהגדרת f כי $a_1=f(a_1)=f(a_2)=a_2$.

תלוי: היא על אם ורק אם $A=X$:

אם $A=X$: ניקח x בטווח וצריך למצוא $a\in A$ כך ש $f(a)=x$. ניקח $a=x$.

אחרת: $A\subsetneq X$ קיים $x\in X$ ש $x\notin A$ ואז לכל $a\in A$ מתקיים ש $f(a)=a\neq x$ ולכן ל x הזה אין מקור ולכן במקרה זה f אינה על.

למשל $X=\{1,2\}$ $A=\{1\}$ אזי f שהגדרנו היא $\{(1,1)\}$(או $1\mapsto 1$) ול 2 אין מקור.

(ה) תהא X קבוצה ו A תת קבוצה של X. פונקצית האינדיקטור (של A) היא $f_A:X\to\{0,1\}$ המוגדרת ע"י הכלל

$$f_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$$

זהו קיצור ל

$$f_A=\{(x,1)\mid x\in A\}\cup\{(x,0)\mid x\in X\backslash A\}$$

למשל $X=\{1,2,3\}$ ו $A=\{1,3\}$ אזי פונקצית האינדיקטור היא $\{(1,1),(2,0),(3,1)\}$

פתרון: תלוי. מקרה קצה: $A=X$ ואז f_A היא פונקציה שקבוע על 1(כלומר $f_A(x)=1$ לכל x) ואזי היא לא על (כי ל 0 אין מקור) והיא לא חח"ע (אם ב A יש שני איברים).

מקרה קצה: $A=\emptyset$ ואז f_A היא פונקציה שקבוע על 0(כלומר $f_A(x)=0$ לכל x) ואזי היא לא על (כי ל 1 אין מקור) והיא לא חח"ע (אם ב A יש שני איברים).

במידה ו $X\subsetneq A\subsetneq\emptyset$ אז f_A תהא על כי קיים $a\in A$ וקיים $x\notin A$ ואז $f(a)=1$ ו $f(x)=0$. בנוסף, היא לא חח"ע (אם ב A יותר מ 3 איברים).