משוואות דיפרנציאליות רגילות – תרגיל III

המייל של רעות: reutti@gmail.com

<u>משוואות מדוייקות:</u>

נגדיר $\vec{F} = M(x,r)dx + N(x,y)dy$ כך ש $\vec{\nabla}\times \mathrm{F} = 0$ כאשר $curlF = \overline{\nabla}\times F = \det\begin{pmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{pmatrix}$. משוואה מדוייקת היא משוואה המתארת כח משמר. ז"א ש $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. או בקיצור $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. אמרנו כבר במכניקה שאם הכח משמר אז העבודה לא תלוייה במסלול. בגלל שהכח משמר מתקיים $dW = Mdx + Ndy = 0 \to W = Const$. ולכן $dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy$. ואז בעצם מתקיים $\frac{\partial w}{\partial y} = N(x,y)$, $\frac{\partial w}{\partial x} = \mathrm{M}(x,y)$.

דוגמא: $dF_1 = -ydx + xdy + zdz$. האם הכח משמר? האם $\overline{\nabla}\times F = 0$?

מתקיים $\overline{\nabla}\times F = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z}\right)\hat{x} - \left(-\frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\right)\hat{z} \neq 0$ ולכן הכח אינו משמר.

כעת נביט בכח $dF_2 = ydx + xdy + zdz$ ונבדוק אם הוא משמר: $\overline{\nabla}\times F = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\right)\hat{z} = 0$ ולכן הכח משמר. כעת, לאחר ההקדמה הפיסיקאלית משהו נעבר לדוגמא יותר מתמטית:

דוגמא: $F = 2xydx + (1+x^2)dy$ הכח הוא משמר, ניתן לראות זאת בקלות. כמו כן $M(x,y) = 2xy, N(x,y) = (1+x^2)$.
כמו כן, כתבנו כבר כי $dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy = 0 = 2xy\,dx + (1+x^2)dy$.

ע"י ביצוע אינטגרציה נקבל $W = \int 2xydx + f(y) = x^2y + f(y)$. נשתמש בנתון השני ונקבל $1 + x^2 = \frac{\partial w}{\partial y} = \mathrm{x}^2 + \frac{\partial f(y)}{\partial y}$ ואז קיבלנו $f(y) = y + c$. נציב זאת בעבודה ונקבל $W = x^2y + y + C$ והעבודה קבועה, ולכן $y = \frac{c}{1+x^2}$.

דוגמא: $(2x + y^2) + 2xy\frac{dy}{dx} = 0$ וצריך לבדוק שזוהי משוואה מדוייקת. נקבל $\frac{\partial w}{\partial y} = 2xy$, $\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + y^2$ וגם כן מתקיים כי $dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy$. שוב, אינטגרציה תיתן לנו $W = \int(2x + y^2)dx + f(y) = x^2 + y^2x + f(y)$. נשתמש במידע הזה ובנתון הנוסף כדי למצוא את *f(y)*. מתקבל $\frac{\partial w}{\partial y} = 2xy = 2yx + \frac{\partial f(y)}{\partial y}$ ולכן $f(y) = \mathrm{C}$. מתקבל $x^2 + y^2x + C = C_1$ וע"י העברת אגפים וחילוק נקבל $y = \pm\sqrt{\frac{c-x^2}{x}}$.

במקרים מיוחדים ניתן לכפול את האינטגרל בקבוע כלשהו. אחד מהתנאים הבאים חייב להתקיים:

1. אם $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ אז הכפול בקבוע $I_0F_0 = e^{\int f(x)dx}$ כאשר $f(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$.
2. או $-g(y) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M}$ ואז $I_0F_0 = e^{\int g(y)dy}$
3. או כאשר $M = y\, f_1(x-y)$. וגם $N = xF_2(x-y)$ אז הקבוע הוא $I_0F_0 = \frac{1}{XM - YN}$.

דוגמא: $\underbrace{(4x^2y - 3y^2)}_{M}dx = \underbrace{(x^3 - 3xy)}_{N}dy$. ניתן לראות שה"כח" הזה אינו משמר. לכן $f(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{x^2 - 3y}{x^3 - 3xy} = \frac{1}{x}$ הקבוע הוא $I = e^{\int\frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$. נכפול הכל בביטוי ההתחלתי ונקבל $(4x^3y - 3y^2x)dx = (x^4 - 3yx^2)dy$, וע"י בדיקה פשוטה ניתן לראות שמדובר בכח משמר. איך נפתור? כמו מקודם. נרשום $\frac{\partial w}{\partial x} = 4x^3y - 3y^2x$ ולכן $W = yx^4 - 1.5y^2x^2 + f(y)$ וגם כן מתקיים $x^4 - 3yx^2 = x^4 - 3yx^2 + \frac{\partial f(y)}{\partial y}$ לכן $f(y)$ קבוע, ואת השאר אפשר לעשות כרגיל.