19.6.18

שיעור חזרה: שאלות מהמבחן לדוגמה:

- שאלה 4 מהמבחן:

תהי
$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&a^2\\1&a^2&0\end{pmatrix}$$

א. עבור אילו ערכי a המטריצה לכסינה?

תזכורת: הגדרת לכסינה A לכסינה אם ורק אם קיימת P הפיכה כך ש: $P^{-1}AP=D$.

ידוע כי המטריצה לכסינה אם ריבוי אלגברי שווה לריבוי גיאומטרי.
על מנת שנקבל ו"ע שונים, בת"ל ⇐ אז היא תהיה לכסינה.

הערה: אם יש ריבוי - נבדוק כל מקרה לגופו.
לדוגמה יכול להיות ערך עצמי עם ריבוי אלגברי 2 ועם ריבוי גיאומטרי 2 ⇐ נקבל ו"ע בת"ל)

פתרון: $|A-\lambda I|=0$

נפתח לפי $i=1$ (שורה 1)

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\1&-\lambda&a^2\\1&a^2&-\lambda\end{vmatrix}=0 \qquad (1-\lambda)[\lambda^2-a^4]=0$$

$\Downarrow$

$\lambda_1=1 \quad \lambda_2=a^2 \quad \lambda_3=-a^2$

קיבלנו שעבור $a\neq 0,1,-1$ המטריצה לכסינה

נבדוק את המקרים בהם $a=0,1,-1$

←

$a=0$

$$A-\lambda I:\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & a^2\\ 1 & a^2 & -\lambda\end{pmatrix}$$

$a=0 \rightarrow \quad \lambda_1=1 \quad \lambda_2=0 \quad \lambda_3=0$

נציב ב- $A-\lambda I$ $\quad \lambda=0 \quad a=0$:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Leftarrow$$

שתי שורות אפסים
נקבל שני וקטורים ב"ע
(שני משתנים חופשיים)

לכן עבור $a=0$ היא לכסינה.

אז 0 יוצא.

נבדוק $a=1$ $\quad \lambda_1=1 \quad \lambda_2=1 \quad \lambda_3=-1$

אז נבדוק $a=1$ $\quad \lambda_1=1$ נציב

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\Leftarrow$$

לא נקבל 2 שורות
אפסים.

יש שורת אפסים אחת, נקבל ו"ע אחד.
(אי אפשר לייצר עוד שורת אפסים)

לא לכסינה! נשארנו ש- $a\neq 1$ (ריבוי אלגברי 2, גיאומטרי 1)

נבדוק $a=-1$ - אותו דבר.

מסקנה, עבור $a\neq \pm 1$ המטריצה לכסינה.

ב. $a=2$ אנחנו כבר יודעים שהיא לכסינה.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&4\\1&4&0\end{pmatrix}$$

$\lambda_3=-4 \quad \lambda_2=4 \quad \lambda_1=1$

נמצא וקטורים עצמיים: $(A-\lambda I)v=0$

$$\begin{pmatrix}1-\lambda&0&0\\1&-\lambda&4\\1&4&-\lambda\end{pmatrix}$$

נציב: $\lambda=1$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&4\\1&4&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&4\\0&5&-5\\0&0&0\end{pmatrix}$$

לפי שורה שניה $y=z=t$

$x=y-4z=-3t$ נבחר $z=-1$

$$V_1=\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

(הערה ב-P הפיכה לא חייב לנרמל)

נציב $\lambda_2=4$

$$\begin{pmatrix}-3&0&0\\1&-4&4\\1&4&-4\end{pmatrix}\rightarrow$$

$x=0$

$y=z$

$$V_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

נציב $\lambda_2=-4$

$$\begin{pmatrix}5&0&0\\1&4&4\\1&4&4\end{pmatrix}\rightarrow$$

$x=0$

$y=-z$

$$V_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}3&0&0\\-1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$$

- הוכיחו את הפירוק:

* נכפיל את שני הצדדים

$$PP^{-1}AP\cdot P^{-1}=PDP^{-1}$$

$$A=PDP^{-1}$$

$$A^{2}=P\cdot D\cdot \underbrace{P^{-1}P}_{I}DP^{-1}=PD^{2}P^{-1}$$

(3) הוכיחו את הפירוק: (שאלה 3 מהמבחן)

1. A מטריצה אורתוגונלית, אם ורק אם (אמ"מ) A^{-1} אורתוגונלית

2. מכפלה של מטריצות אורתוגונליות היא מטריצה אורתוגונלית

3. A^2 מטריצה אורתוגונלית אז A אורתוגונלית

1.

מטריצה אורתוגונלית P מקיימת: $PP^t=P^tP=I$

$\Downarrow$

כאשר P אורתוגונלית $P^t=P^{-1}$ $\rightarrow$

עלינו להוכיח אם P אורתוגונלית $\Longleftrightarrow$ P^t אורתוגונלית.

P^t אורתוגונלית: $P^t\cdot(P^t)^t=(P^t)^t\cdot P^t\overset{?}{=}I$

$P^t\cdot P\overset{?}{=}P\cdot P^t=I$ $\Leftarrow$ זה נתון מהנתון

ולכן P^t אורתוגונלית

וגם מהכיוון השני זה נכון

2. נתון P,Q אורתוגונלית

נתון:

$$P: \quad PP^t = P^t \cdot P = I$$

$$Q: \quad Q \cdot Q^t = Q^t \cdot Q = I$$

האם PQ אורתוגונלית

צריך להוכיח:

$$(PQ)\cdot(PQ)^t = (PQ)^t \cdot (PQ) \overset{?}{=} I$$

$$\underbrace{P\underbrace{Q \cdot Q^t}_{I}\cdot P^t}_{\text{סה"כ } I} = Q^t \underbrace{P^t \cdot P}_{I} \cdot Q = I$$

כי Q אורתוגונלית

כי P אורתוגונלית

3. A^2 היא מטריצה אורתוגונלית אם A אורתוגונלית - הפוך?

$$^{*}\ (A^2)^t = (A^t)^2$$

A^2 אורתוגונלית - מה זה אומר?

$$A^2 \cdot (A^2)^t = (A^2)^t \cdot A^2 = I$$

$$^{*}\ A^2 \cdot (A^t)^2 = (A^t)^2 \cdot A^2 = I$$

ניתן לראות שזה לא מתקיים.

ננסה לבדוק הפרכה.

$$A = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \ ? \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(לא אורתוגונלית)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אך אחת (A) לא אורתוגונלית   כן אורתוגונלית