

מבוא לאלגברה לינארית 89-119, מועד א', סמסטר א' תשע"ט

- מרצה: אחיה בר-און. מתרגלת: אלכסנדרה סימנובסקי.
- קורס: מבוא לאלגברה לינארית 01 – 89119.
- תאריך: י"ט שבט התשע"ט, 25/1/2019.
- משך המבחן: 3 שעות.
- חומר עזר: מחשבון.
- הוראות: לפניכם 5 שאלות ו 10 סעיפים (כל שאלה בת שתי סעיפים). יש לענות על כולם. על התשובות להיות מפורטות ומנומקות.
- ניקוד: כל סעיף 10 נקודות.
- ככל אצבע, דרך נכונה ומנומקת שווה 5 נקודות ותשובה סופית נכונה המתבססת על דרך נכונה שווה 5 נקודות.
- 5 נקודות ירדו על תשובה סופית ללא דרך מנומקת וכל שכן ש 5 נקודות ירדו על תשובה סופית שגויה (ללא תלות בסיבת הטעות).

בהצלחה!

1.

(א) נתונה מערכת משוואות לינארית התלויה בפרמטר a

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + ax_3 &= 1 \\ax_1 + 3x_2 - x_3 &= -2 \\3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 2\end{aligned}$$

מצאו ונמקו לאילו ערכי a למערכת פתרון יחיד? לאילו ערכי a למערכת אינסוף פתרונות? ולאילו ערכי a למערכת אין פתרון?

(ב) עבור $a = 10$ כתבו את כל הפתרונות למערכת

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + ax_3 &= 0 \\ax_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 0\end{aligned}$$

(אם אין פתרון, כיתבו "אין פתרון למערכת").

2. נתונה המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

(א) האם A הפיכה? במידה וכן, מצאו A^{-1} .

(ב) חשבו את $|A|$ (הדטרמיננטה של A). האם קיים $\alpha \in \mathbb{R}$ כך ש $|\alpha A| = 10$? אם כן, מצאו α כזאת.

3. נתונה $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ תת הקבוצה של \mathbb{R}^3 כאשר

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(א) מצאו בסיס ל $\text{span}(S)$.

(ב) האם $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של וקטורי S ? אם כן, מצאו את הצירוף

הלינארי, כלומר מצאו $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ כך ש

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = v$$

4. נתונה המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

וידוע כי 2 ערך עצמי שלה.

(א) האם A לכסינה? במידה וכן, מצאו מטריצה P הפיכה ו D אלכסונית כך ש $P^{-1}AP = D$.

(ב) הוכיחו כי 4 ערך עצמי של A^2 (כאשר המטריצה A^2 היא המטריצה $A \cdot A$).

5. נתונים הוקטורים $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ב \mathbb{R}^3 .

(א) מצאו וקטור v_3 שונה מוקטור האפס המקיים $v_3 \in \{v_1, v_2\}^\perp$.

(ב) נגדיר $A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$ מטריצה מגודל 3×3 שהעמודה הראשונה שלה

היא v_1 , העמודה השנייה שלה היא v_2 והעמודה השלישית שלה היא v_3 . מצאו את הדרגה של $A^t A$ (כלומר מצאו את $\text{rank}(A^t A)$).
 תזכורת: $A^t \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ היא המטריצה המשוחלפת של A המוגדרת ע"י $[A^t]_{i,j} = A_{j,i}$.