תרגיל בית 9 אינפי 3

1. מצאו נקודות קריטיות וסווגו אותן (מקסימום/מינימום/אוכף) עבור הפונקציות הבאות (בכל תחום ההגדרה)

(א) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 6y^2$

פתרון.

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 6y^2$$

נחשב גרדיאנט ונקבל

$$\nabla f = (3x^2 + 6x, 3y^2 - 12y)$$

הגרדיאנט מתאפס כאשר

$$3x^2 + 6x \Rightarrow x = 0 \vee x = -2$$

$$3y^2 - 12y = 0 \Rightarrow y = 0 \vee y = 4$$

לכן הנקודות הקריטיות הן

$$(0,0), \quad (0,4), \quad (-2,0), \quad (-2,4)$$

נחשב את מטריצת ההסיאן.

$$H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 6x+6 & 0 \\ 0 & 6y-12 \end{pmatrix}$$

נבדוק את המטריצה עבור כל נקודה

$$H_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $6, -12$ ולכן המטריצה מעורבת וזו נקודת אוכף.

$$H_{(0,4)} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $6, 12$ ולכן זו מטריצה חיובית לחלוטין והנקודה היא נקודת מינימום.

$$H_{(-2,0)} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $-6, -12$ ולכן זו מטריצה שלילית לחלוטין וזו נקודת מקסימום.

$$H_{(-2,4)} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $-6, 12$ ולכן זו מטריצה מעורבת וזו נקודת אוכף.

(ב) $f(x,y) = (x-1)^2 - 2y^2$

פתרון.

$$f(x,y) = (x-1)^2 - 2y^2$$

הגרדיאנט הוא:

$$\nabla f = (2(x-1), -4y)$$

הוא שווה לאפס רק בנקודה

$$(1,0)$$

מטריצת ההסיאן היא

$$H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

בפרט

$$H_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $2, -4$ ולכן זו מטריצה מעורבת והנקודה היא נקודת אוכף.

(ג) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

פתרון.

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

$$\nabla f = (4x^3 - 4x + 4y, 4y^3 - 4y + 4x)$$

כלומר נקבל מערכת משוואות:

$$x^3 - x + y = 0$$
$$y^3 - y + x = 0$$

נסכום את שתי המשוואות ונקבל

$$x^3 + y^3 = 0$$

ולכן $x = -y$. נציב זאת במשוואה הראשונה ונקבל

$$x^3 - 2x = 0$$

שזה מתקיים כאשר $x = 0$ או כאשר $x = \pm\sqrt{2}$. לכן הנקודות הקריטיות הן

$$(0,0), \quad (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), \quad (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

מטריצת ההסיאן היא:

$$H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

עבור

$$H_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

שזו מטריצה לא הפיכה ולכן לא ניתן לקבוע מההסיאן אם הנקודה היא מינימום, מקסימום או אוכף.

$$H_{(\sqrt{2},-\sqrt{2})} = H_{(-\sqrt{2},\sqrt{2})} = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

בעזרת קריטריון סילבסטר נראה ש $20 > 0$ ו הדטרמיננטה היא $400 - 16 > 0$ ולכן המטריצה היא חיובית לחלוטין ולכן אלה נקודות מינימום.

כדי לבדוק את $(0,0)$ נשתמש בדרכים אחרות.

נשים לב ש

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

אם נתקדם לאורך $x = y$ נקבל ש

$$f(x,x) = x^4 + x^4 \geq 0$$

ולכן $(0,0)$ היא לא נקודת מקסימום.

מצד שני, אם נתקדם לאורך $y=0$ נקבל

$$f(x,0)=x^4-2x^2$$

אם נחקור פונקציה זו נקבל

$$f'=4x^3-4x$$

$$f''=12x^2-4$$

בנקודה $x=0$ נקבל

$$f''(0)=-4<0$$

ולכן $x=0$ היא מקסימום לאורך הישר $y=0$. ולכן היא לא מינימום, לכן קיבלנו ש $(0,0)$ היא נקודת אוכף.

(ד) (רשות-אין צורך להגיש) $(a,b>0)$ $f(x,y)=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$

פתרון.

$$f(x,y)=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\quad (a,b>0)$$

נחשב את הגרדיאנט

$$f_x=y\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}+xy\frac{-2\frac{x}{a^2}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}=\frac{y(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})-\frac{x^2y}{a^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}=\frac{y-2\frac{x^2y}{a^2}-\frac{y^3}{b^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$$

באופן דומה

$$f_y=\frac{x-\frac{x^3}{a^2}-2\frac{y^2x}{b^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$$

לכן צריך לבדוק מתי

$$\frac{y-2\frac{x^2y}{a^2}-\frac{y^3}{b^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}=0,\quad \frac{x-\frac{x^3}{a^2}-2\frac{y^2x}{b^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}=0$$

כלומר

$$y-2\frac{x^2y}{a^2}-\frac{y^3}{b^2}=0,\quad x-\frac{x^3}{a^2}-2\frac{y^2x}{b^2}=0$$

ראשיתת נניח ש $y\neq 0,\quad x\neq 0$ ואז ניתן לחלק ב y במשוואה הראשונה וב x במשוואה השניה. ולקבל

$$1-2\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2},\quad 1-\frac{x^2}{a^2}-2\frac{y^2}{b^2}=0$$

כלומר

$$2\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1=\frac{x^2}{a^2}-2\frac{y^2}{b^2}$$

ולכן

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}$$

ולכן

$$x=\pm\frac{ay}{b}$$

נציב זאת במשוואה

$$1-\frac{x^2}{a^2}-2\frac{y^2}{b^2}=0$$

ונקבל

$$1-\frac{y^2}{b^2}-2\frac{y^2}{b^2}=0$$

כלומר

$$y^2=\frac{b^2}{3}$$

ולכן

$$y=\pm\frac{b}{\sqrt{3}}$$

כלומר, אם לא מסתכלים על הצירים (כי הנחנו ש $x,y\neq 0$) הנקודות הקריטיות הן

$$(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}),\quad(\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}),\quad(-\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}),\quad(-\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}})$$

כעת נבדוק מה קורה על הצירים. ברור ש $(0,0)$ היא נקודה קריטית. אם $x=0$ אבל $y\neq 0$ נקבל

$$y-2\frac{x^2y}{a^2}-\frac{y^3}{b^2}=0\Rightarrow y-\frac{y^3}{b^2}=0\Rightarrow 1=\frac{y^2}{b^2}\Rightarrow y=\pm b$$

באופן דומה אם $y=0$ ו $x\neq 0$ נקבל נקודות קריטיות כאשר $x=\pm a$. אבל $(a,0),\quad(-a,0),\quad(0,b),\quad(0,-b)$ נמצאים מחוץ לתחום שאנחנו בודקים ולכן נזרוק אותן. לסיכום: כלל הנקודות הקריטיות הן

$$(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}),\quad(\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}),\quad(-\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}),\quad(-\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}),\quad(0,0)$$

ראשית נבדוק את הנקודה $(0,0)$. ברור ש $\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}>0$ בסביבת הנקודה בכל התחום שלנו. לכן אם נתקדם לאורך $x=y$ נקבל

$$f(x,x)=x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}>0$$

ואם נתקדם לאורך $x=-y$ נקבל

$$f(x,-x)=-x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}<0$$

אבל $f(0,0)=0$ ולכן זו נקודת אוכף.

כדי לסווג את שאר הנקודות, נסתמך על התובנות הבאות:

- אם $f(x_0)>0$ אז x_0 מקסימום מקומי של f אם ורק אם הוא מקסימום מקומי של f^2.
- אם $f(x_0)>0$ אז x_0 מינימום מקומי של f אם ורק אם הוא מינימום מקומי של f^2.
- אם $f(x_0)<0$ אז x_0 מקסימום מקומי של f אם ורק אם הוא מינימום מקומי של f^2.
- אם $f(x_0)<0$ אז x_0 מינימום מקומי של f אם ורק אם הוא מקסימום מקומי של f^2.

לכן נחקור את

$$f^2(x,y)=x^2y^2(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})=x^2y^2-\frac{x^4y^2}{a^2}-\frac{x^2y^4}{b^2}$$

נגזרות מסדר ראשון

$$f_x=2xy^2-4\frac{x^3y^2}{a^2}-2\frac{xy^4}{b^2},\quad f_y=2x^2y-2\frac{x^4y}{a^2}-4\frac{x^2y^3}{b^2}$$

ולכן הנגזרות מסדר שני הן:

$$f_{xx}=2y^2-12\frac{x^2y^2}{a^2}-2\frac{y^4}{b^2},\quad f_{xy}=4xy-8\frac{x^3y}{a^2}-8\frac{xy^3}{b^2},\quad f_{yy}=2x^2-2\frac{x^4}{a^2}-12\frac{x^2y^2}{b^2}$$

ולכן ההסיאן היא:

$$H_{(x,y)}=\begin{pmatrix} 2y^2-12\frac{x^2y^2}{a^2}-2\frac{y^4}{b^2} & 4xy-8\frac{x^3y}{a^2}-8\frac{xy^3}{b^2} \\ 4xy-8\frac{x^3y}{a^2}-8\frac{xy^3}{b^2} & 2x^2-2\frac{x^4}{a^2}-12\frac{x^2y^2}{b^2}\end{pmatrix}$$

נבדוק כל נקודה קריטית בנפרד

$$H_{(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}})}=\begin{pmatrix} \frac{2b^2}{3}-\frac{4b^2}{3}-\frac{2b^2}{9} & \frac{4ab}{3}-\frac{8ab}{9}-\frac{8ab}{9} \\ \frac{4ab}{3}-\frac{8ab}{9}-\frac{8ab}{9} & \frac{2a^2}{3}-\frac{4a^2}{3}-\frac{2a^2}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{8b^2}{9} & -\frac{4ab}{9} \\ -\frac{4ab}{9} & -\frac{8a^2}{9}\end{pmatrix}$$

המינור הראשון הוא $-\frac{8b^2}{9}<0$ והמינור השני הוא הדטרמיננטה שהיא $\frac{64a^2b^2}{81}-\frac{16a^2b^2}{81}=\frac{48a^2b^2}{81}>0$ לכן זוהי מטריצה שלילית לחלוטין וזו נקודת מקסימום של f^2.

קל לראות שנקבל אותו מינור ראשון ואותה דטרמיננטה עבור כל אחת מהנקודות הקריטיות ולכן הן כולן מקסימום של f^2.

כעת, נשים לב ש $f(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}), f(-\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}}) > 0$ ולכן נקודות אלה הן מקסימום גם של f ואילו $f(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}), f(\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}}) < 0$ ולכן נקודות אלה הן מינימום של f.

(ה) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

פתרון.

$$f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

נמצא נגזרות חלקיות

$$f_x(x,y) = 2xe^{-(x^2+y^2)} + (x^2+y^2)(-2x)e^{-(x^2+y^2)}$$

באופן דומה

$$f_y(x,y) = 2ye^{-(x^2+y^2)} + (x^2+y^2)(-2y)e^{-(x^2+y^2)}$$

כלומר נקבל משוואות

$$2x - 2x(x^2+y^2) = 0$$

$$2y - 2y(x^2+y^2) = 0$$

אם $x \neq 0$ ו $y \neq 0$ נקבל שהמשוואות מתקיימות בכל נקודה שבה $x^2+y^2 = 1$.

אם $x = 0$ נקבל שהמשוואה השניה היא:

$$2y - 2y^3 = 0$$

שפתרונותיה הם $y = 0$או $y = \pm 1$ ובדומה נקבל שאם $y = 0$ אז $x = 0$או $x = \pm 1$. ולכן הנקודות הקריטיות הן

$$\{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\} \cup \{(0,0)\}$$

היות ו $f(x,y) \geq 0$ ו $f(0,0) = 0$ ברור ש $(0,0)$ היא נקודת מינימום. כדי לחקור את שאר הנקודות אפשר להציב $t = x^2+y^2$ ולחקור את הפונקציה $g(t) = te^{-t}$ בנקודה $t = 1$.

נקבל ש

$$g' = e^{-t} - te^{-t}$$

$$g'' = -e^{-t} - e^{-t} + te^{-t}$$

ולכן

$$g''(1) = -2e^{-1} + e^{-1} = -e^{-1} < 0$$

ולכן זו נקודת מקסימום ולכן גם הנקודות שבהן $x^2 + y^2 = 1$ הן נקודות מקסימום.

ו) $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2a^2(x^2 + y^2 + z^2) \quad (a > 0)$

פתרון.

$$f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2a^2(x^2 + y^2 + z^2) \quad (a > 0)$$

נחשב נגזרות חלקיות ונשווה ל 0

$$f_x = 4x^3 - 4a^2x = 0 \Rightarrow x \in \{0, a, -a\}$$

$$f_y = 4y^3 - 4a^2y = 0 \Rightarrow y \in \{0, a, -a\}$$

$$f_z = 4z^3 - 4a^2z = 0 \Rightarrow z \in \{0, a, -a\}$$

קיבלנו שיש 27 נקודות קריטיות

$$\{0, a, -a\} \times \{0, a, -a\} \times \{0, a, -a\}$$

נמצא את מטריצת ההסיאן

$$H_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 12y^2 - 4a^2 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$H_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} -4a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -4a^2 \end{pmatrix}$$

זאת מטריצה שלילית לחלוטין ולכן $(0,0,0)$ היא נקודת מקסימום.

$$H_{(\pm a,0,0)} = \begin{pmatrix} 8a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -4a^2 \end{pmatrix}$$

זאת מטריצה מעורבת ולכן $(\pm a, 0, 0)$ היא נקודת אוכף, באופן דומה $(0, \pm a, 0)$ ו $(0, 0, \pm a)$ הן נקודות אוכף.

$$H_{(\pm a, \pm a, 0)} = \begin{pmatrix} 8a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 8a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -4a^2 \end{pmatrix}$$

זאת מטריצה מעורבת ולכן $(\pm a, \pm a, 0)$ היא נקודת אוכף.באופן דומה גם $(\pm a, 0, \pm a)$ ו $(0, \pm a, \pm a)$ הן נקודות אוכף.

כעת,

$$H_{(\pm a, \pm a, \pm a)} = \begin{pmatrix} 8a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 8a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 8a^2 \end{pmatrix}$$

זאת מטריצה חיובית לחלוטין ולכן אלה נקודות מינימום.

2. תהי

$$f(x,y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$$

(א) הוכיחו כי $(0,0)$ היא נקודה קריטית.

פתרון.

$$f(x,y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$$

נחשב נגזרות חלקיות

$$f_x = -6x(y - x^2) + (y - 3x^2)(-2x), \quad f_y = (y - x^2) + (y - 3x^2)$$

קל לראות ש $(0,0)$ מאפסת את שתי הנגזרות החלקיות ולכן היא נקודה קריטית.

(ב) הוכיחו כי ל f יש מינימום מקומי לאורך כל קו ישר העובר דרך הראשית. כלומר, אם נגדיר $g(t) = (at, bt)$ עבור $a, b \in \mathbb{R}$ יתקיים כי ל $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ יש מינימום מקומי ב $t = 0$.

פתרון.

$$f \circ g(t) = (bt - 3a^2t^2)(bt - a^2t^2) = b^2t^2 - 3a^2bt^3 - a^2bt^3 + 3a^4t^4 = 3a^4t^4 - 4a^2bt^3 + b^2t^2$$

נחקור פונקציה זו בשיטות רגילות של אינפי 1. נגזרת ראשונה:

$$12a^4t^3 - 12a^2bt^2 + 2b^2t$$

ברור ש $t = 0$ הוא פתרון.

נגזרת שניה:

$$36a^4t^2 - 24a^2bt + 2b^2$$

אם נציב $t = 0$ נקבל $2b^2 > 0$ ולכן זה מינימום.

(ג) הוכיחו כי $(0,0)$ אינה מינימום מקומי של f.

פתרון. נתקדם לאורך $y = 2x^2$ ונקבל

$$f(x, 2x^2) = (2x^2 - 3x^2)(2x^2 - x^2) = -x^4$$

לפונקציה זו יש מקסימום בנקודה $x = 0$ ולכן $(0,0)$ אינה נקודת מינמום אלא נקודת אוכף.

3. תהי $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 2x - 2y$. נגדיר את D להיות המשולש הסגור שקודקודיו הם: $(0,0), (0,6), (6,0)$.

(א) הוכיחו כי ל f יש מינימום ומקסימום גלובאליים על הקבוצה D.

פתרון. היות ש f פונקציה רציפה ו D קבוצה סגורה וחסומה אז f מקבלת מינימום ומקסימום עליה.

(ב) מצאו את המינימום והמקסימום הגלובאליים של f על D.

פתרון. נחפש תחילה נקודות קריטיות בתוך המשולש

$$f_x = 2x - y - 2 = 0$$

$$f_y = 2y - x - 2 = 0$$

זאת מערכת לינארית פשוטה הפתרון היחיד הוא

$$x = 2 \quad y = 2$$

נקודה זאת אכן בתוך המשולש והיא נקודה קריטית. נעבור על צלעות המשולש:
עבור $y = 0$

$$f(x,0) = x^2 - 2x$$

$$f' = 2x - 2$$

נקודה קריטית ב $x=1$כלומר $(1,0)$. בדומה קל למצוא את הנקודה הקריטית $(0,1)$ על הצלע $x=0$. על הצלע $x+y=6$ נקבל:

$$\begin{aligned} f(x,6-x) &= x^2+(6-x)^2-x(6-x)-2x-2(6-x) = \\ & x^2+36+x^2-12x-6x+x^2-2x-12+2x = \\ & 3x^2-18x+24 \end{aligned}$$

נגזור ונקבל

$$f' = 6x-18$$

כלומר $x=3$ נקודה קריטית. אם נאסוף את כל הנקודות החשודות נקבל את $(2,2),(3,3),(1,0),(0,1)$ ובנוסף את הקודקודים $(0,6),(6,0),(0,0)$ ולכן נותר לבדוק:

$$f(0,6)=24, \quad f(6,0)=24, \quad f(0,0)=0$$

$$f(2,2)=-4, \quad f(3,3)=-3, \quad f(1,0)=f(0,1)=-1$$

קיבלנו ש $(0,6)$ו $(6,0)$ הם מקסימום גלובאלי וערכם 24. ו $(2,2)$ הוא מינימום גלובאלי שערכו -4.