אינפי 1־ תרגיל 2־ פתרון

23 בנובמבר 2014

1.א. יהי r ממשי גדול מ0. לכן $\frac{1}{r}$הוא גם ממשי. H אינסופי חיובי ולכן $H > \frac{1}{r}\Leftarrow$ $r < \frac{1}{H}$. לכן $\frac{1}{H}$ אינפיניטיסימל חיובי.

ב. x אינפיניטיסימל אם ורק אם $|x|$ אינפיניטיסימל חיובי. לכן, x, y אינפיניטיסימלים $\Leftarrow|x|, |y|$ אינפיניטיסימליים. יהי r ממשי חיובי, $\sqrt{r}$ גם הוא ממשי חיובי, לכן $|xy| = |x| \cdot |y| < \sqrt{r} \cdot \sqrt{r} = r.$. לכן $|xy|$ אינפיניטיסימלי חיובי$\Leftarrow$xyאינפיניטיסימלי.

ג. יהי r ממשי, לכן r סופי$\Leftarrow \frac{r}{b}$ סופי. הראינו בתרגול שמספר אינסופי גדול מכל מספר סופי (לא בהכרח ממשי) לכן $H > \frac{r}{b}\Leftarrow Hb > r$ (בגלל שbחיובי, ההכפלה בו לא משנה את סימן האי־ שוויון)

ד. טענת עזר: x סופי אמ"ם $|x|$סופי. הוכחה: אם $|x| < r$ עבור r ממשי אז $-r < x < r$. ואם $a < x < b$ אז ניקח $c = max\{|a|, |b|\}$ ונקבל $|x| < c$.

כעת, נניח ש a, b סופיים, $\Leftarrow|a|, |b|$ סופיים. כלומר, קיימים r, s ממשיים כך ש: $|a| < r, |b| < s\Leftarrow|ab| < sr\Leftarrow|ab|$סופי$\Leftarrow ab$ סופי

ה. מקרה 1: נקח $K = H^2$. $\frac{H}{H^2} = \frac{1}{H}$אינפיניטיסימלי.

מקרה 2: נקח $H = K^2$. $\frac{K^2}{K} = K$ אינסופי.

מקרה 3: נקח $H = K$. $\frac{H}{H} = 1$. סופי שאינו אינפיניטיסימלי.

2. א. $\sqrt{H+1} - \sqrt{H} = \frac{H+1-H}{\sqrt{H+1}+\sqrt{H}} = \frac{1}{\sqrt{H+1}+\sqrt{H}}$. המכנה הוא אינסופי, ומספר סופי חלקי אינסופי הוא אינפיניטיסימלי.

ב. $\frac{H+4+\epsilon}{H^2+2H} = \frac{H^2(\frac{1}{H}+\frac{4}{H^2}+\frac{\epsilon}{H^2})}{H^2(1+\frac{2\epsilon}{H^2})} = \frac{\frac{1}{H}+\frac{4}{H^2}+\frac{\epsilon}{H^2}}{1+\frac{2\epsilon}{H^2}}$. המונה אינפיניטיסימלי והמכנה סופי לכן הביטוי אינפיניטיסימלי.

ג. $\frac{\sqrt{4+\epsilon}-2}{\epsilon} = \frac{4+\epsilon-4}{\epsilon(\sqrt{4+\epsilon}+\sqrt{\epsilon})} = \frac{\epsilon}{\epsilon(\sqrt{4+\epsilon}+\sqrt{\epsilon})} = \frac{1}{\sqrt{4+\epsilon}+\sqrt{\epsilon}}$ המכנה מספר סופי שאינו אינפיניטיסימלי ולכן הביטוי כולו סופי שאינו אינפיניטיסימלי

ד. הביטוי יכול לצאת כל סוג של מספר.

ניתן לקחת את אותן דוגמאות מ1.ה' כאשר מסמנים $\epsilon = \frac{1}{K}$מכיון שההופכי של מספר אינסופי הוא מספר אינפיניטיסימלי.

ה. $H(\sqrt{3+\frac{1}{H}}-\sqrt{3})=\frac{H(3+\frac{1}{H}-3)}{\sqrt{3+\frac{1}{H}}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3+\frac{1}{H}}+\sqrt{3}}$ המונה והמכנה סופיים שאינם אינפיניטיסימליים ולכן הביטוי סופי שאינו אינפיניטיסימלי.

ו. $\frac{\sqrt{H}}{\sqrt{H+1}+\sqrt{H+2}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{H+1}}{\sqrt{H}}+\frac{\sqrt{H+2}}{\sqrt{H}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{H+1}{H}}+\sqrt{\frac{H+2}{H}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{H}}+\sqrt{1+\frac{2}{H}}}$ המונה והמכנה סופיים שאינם אינפיניטיסימליים ולכן הביטוי סופי שאינו אינפיניטיסימלי.

ז. $\sqrt[3]{H}-\sqrt[3]{H+1}=\frac{H-(H+1)}{\sqrt[3]{H^2}+\sqrt[3]{H(H+1)}+\sqrt[3]{(H+1)^2}}=\frac{-1}{\sqrt[3]{H^2}+\sqrt[3]{H(H+1)}+\sqrt[3]{(H+1)^2}}$ המכנה אינסופי ולכן הביטוי כולו אינפיניטיסימלי.

ח. $\frac{(3+\epsilon)(4+\delta)-12}{\epsilon\delta}=\frac{12+4\epsilon+3\delta+\epsilon\delta-12}{\epsilon\delta}=\frac{4\epsilon+3\delta+\epsilon\delta}{\epsilon\delta}=\frac{4}{\delta}+\frac{3}{\epsilon}+1$ קיבלנו סכום של שני ביטויים אינסופיים חיוביים ו1, ולכן הביטוי כולו הוא אינסופי חיובי

ט. $\frac{H+K}{\sqrt{H^2+K^2}}=\frac{1+\frac{K}{H}}{\sqrt{1+(\frac{K}{H})^2}}$

מקרה ראשון: $\frac{K}{H}$ אינפיניטיסימל. $\Leftarrow (\frac{K}{H})^2$ אינפיניטיסימל. לכן המונה והמכנה מספרים סופיים שאינם אינפיניטיסימלים, והביטוי כולו סופי שאינו אינפיניטיסימל.

מקרה שני: $\frac{K}{H}$סופי$\Leftarrow(\frac{K}{H})^2$ סופי. לכן המונה והמכנה מספרים סופיים שאינם אינפיניטיסימלים, והביטוי כולו סופי שאינו אינפיניטיסימל.

מקרה שלישי: $\frac{K}{H}$אינסופי $\Leftarrow(\frac{K}{H})^2$ אינסופי. נסמן $M=\frac{K}{H}$. $\frac{\frac{1}{M}+1}{\sqrt{\frac{1}{M^2}+1}}=\frac{1+M}{\sqrt{1+M^2}}$לכן המונה והמכנה מספרים סופיים שאינם אינפיניטיסימלים, והביטוי כולו סופי שאינו אינפיניטיסימל.

קיבלנו שבכל מקרה הביטוי סופי שאינו אינפיניטיסימל.

י. $\frac{H+sin(H)}{H-cos(H)}=\frac{1+\frac{sin(H)}{H}}{1-\frac{cos(H)}{H}}$. $sin(H)$ ו־ $cos(H)$ הם ביטויים חסומים ולכן סופיים (יכולים להיות גם אינפיניטיסימליים) לכן $\frac{sin(H)}{H}$ו־ $\frac{cos(H)}{H}$הם ביטויים אינפיניטיסימליים. נובע מכך שהמונה והמכנה הם מספרים סופיים שאינם אינפיניטיסימליים, ולכן הביטוי כולו סופי שאינו אינפיניטיסימל.

3. $\frac{aH^2-2H+5}{bH^2+H-2}=\frac{a-\frac{2}{H}+\frac{5}{H^2}}{b+\frac{1}{H}-\frac{2}{H^2}}$. $\frac{2}{H}+\frac{5}{H^2}$ ו־ $\frac{1}{H}-\frac{2}{H^2}$ הם ביטויים אינסופיים, לכן:

א. אם $a,b\neq 0$ יש לנו מונה ומכנה סופיים, ולכן הביטוי כולו סופי שאינו אינפי'

ב. אם $a=0$, $b\neq 0$, המונה אינפיניטיסימלי והמכנה סופי שאינו אינפיניטיסימלי, ולכן הביטוי כולו אינפיניטיסימלי.

ג. אם $a\neq 0$, $b=0$ המונה סופי שאינו אינפיניטיסימלי והמכנה אינפיניטיסימלי, ולכן הביטוי כולו אינסופי.

ד. אם $a,b=0$ נקבל: $\frac{-2H+5}{H-2}=\frac{-2+\frac{5}{H}}{1-\frac{2}{H}}$ במקרה כזה המונה והמכנה סופיים שאינם אינפיניטיסימליים, ולכן הביטוי כולו סופי שאינו אינפיניטיסימל.

לסיכום: סופי שאינו אינפיניטיסימלי־ כאשר $a,b=0$ או $a,b\neq 0$

אינסופי: כאשר $a\neq 0$, $b=0$

אינפיניטיסימלי: כאשר־ $b \neq 0a = 0,$

4. א. $\frac{-1}{8\epsilon} < 0 < 4 + 6\epsilon^2 < 4 + 2\epsilon < 7$

הסבר: $\frac{-1}{8\epsilon}$ הוא מספר שלילי ולכן הקטן ביותר. שאר המספרים חיוביים ולכן גדולים מ0. $6\epsilon^2$ ו־ 2ϵ שניהם מספרים אינפיניטיסימליים ולכן קטנים מ1, לכן $4+6\epsilon^2, 4+2\epsilon <$ $7 < 5 = 1 + 4$ נותר רק להראות ש: $4 + 6\epsilon^2 < 4 + 2\epsilon$.

ובכן: $\epsilon < \frac{1}{3} \Leftarrow \epsilon^2 < \frac{1}{3}\epsilon \Leftarrow 3\epsilon^2 < \epsilon \Leftarrow 6\epsilon^2 < 2\epsilon$ ולכן $4 + 6\epsilon^2 < 4 + 2\epsilon$

ב. $H - H^2 < 0 < \frac{1}{5H^2} < \frac{1}{3H} < 7 < H^2 - H$

הסבר: $H - H^2 = H(1 - H)$ אינסופי חיובי כפול אינסופי שלילי שווה אינסופי שלילי.

$H^2 - H = H(H - 1)$ אינסופי חיובי כפול אינסופי חיובי שווה אינסופי חיובי.

$\frac{1}{5H^2}$ו־ $\frac{1}{3H}$ שניהם אינפיניטיסימלים חיוביים, ולכן נמצאים בין 0 ל7. נוכיח ש־ $\frac{1}{3H} < \frac{1}{5H^2}$
.

ובכן, H אינסופי ולכן $H > \frac{3}{5} \Leftarrow 5H > 3 \Leftarrow 5H^2 > 3H \Leftarrow \frac{1}{3H} < \frac{1}{5H^2}$