מד"ר פרידות

תזכורת: מד"ר פרידה היא מד"ר מהצורה

$$y' = f(y)g(x)$$

פותרים כך: מסמנים $y' = \dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = f(y)g(x)$$

מעבירים אגפים על מנת לכנס ביחד את כל הxים ואת כל הyים.

$$\frac{dy}{f(y)} = g(x)dx$$

עושים אינטגרל על שני האגפים:

$$\int \frac{1}{f(y)}dy = \int g(x)dx$$

פותרים את האינטגרלים ומגיעים לאיזשהי משוואה שמקשרת בין x לy. במידה ואפשר מחלצים את y.

בנוסף, לפעמים יש "פתרונות סינגולריים": אם יש ערך של y, y_0 שעבורו הביטוי $f(y_0) = 0$, אז הפונקציה הקבועה

$$y(x) = y_0$$

היא פתרון סינגולרי.

ייתכן שיהיו כמה ערכים כאלה, ואז יהיו כמה פתרונות סינגולריים. (יכול להיות אפילו אינסוף).

ייתכן שאין שום ערך שמאפס את $f(y)$, ואז אין פתרונות סינגולריים.

תרגיל: $y' = 4x(y+1)^2$.

פתרון:

$$\frac{dy}{dx} = 4x(y+1)^2$$

$$\frac{dy}{(y+1)^2} = 4xdx$$

$$\int \frac{dy}{(y+1)^2} = \int 4xdx$$

עבור האינטגרל השמאלי: זה שווה לביטוי $(y+1)^{-2}$ שזה מהצורה $(y+1)^n$.

$$-\frac{1}{y+1} = 2x^2 + c$$

$$y=-\frac{1}{2x^2+c}-1$$

יש גם פתרון סינגולרי אחד: $y=-1$.

תרגיל: $y'=-\frac{y^2+1}{x^2+1}$

פתרון:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2+1}{x^2+1}$$

$$\frac{dy}{y^2+1}=-\frac{dx}{x^2+1}$$

$$\int\frac{dy}{y^2+1}=\int-\frac{dx}{x^2+1}$$

$$\arctan y=-(\arctan x)+c$$

$$y=\tan(-(\arctan x)+c)$$

$$f^{-1}(y)=...$$

$$y=f(...)$$

$$e^y=\sin x$$

$$y=\ln(\sin(x))$$

$$\ln y=\sin x$$

$$y=e^{\sin x}$$

אין פתרונות סינגולריים.

מד"ר לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים

אנחנו הולכים לפתור מד"רים מהסוג הבא:

$$ay''+by'+cy=0$$

כאשר $a, b, c \in \mathbb{R}$.
למשל:
$y'' + 3y' - 5y = 0$
$2y'' + 12y' - \pi y = 0$
ננחש פתרון מהצורה $y = e^{\lambda x}$.
$y' = \lambda e^{\lambda x}$
$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$
נציב במשוואה:

$$a(\lambda^2 e^{\lambda x}) + b(\lambda e^{\lambda x}) + c(e^{\lambda x}) = 0$$

אפשר לחלק ב$e^{\lambda x}$ כי זאת פונקציה שאף פעם לא מתאפסת.

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

הגדרה: המשוואה $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ נקראת המשוואה האופיינית של המד"ר $ay'' + by' + cy = 0$. (אפשר לקרוא לפולינום עצמו "הפולינום האופייני)

אם λ הוא שורש של הפולינום האופייני, אז $y = e^{\lambda x}$ היא פתרון של המד"ר.

מכיוון שזאת מד"ר מסדר שני, אז אנחנו צריכים שני פתרונות שונים למד"ר, נקרא להם y_1 וy_2. ואז הפתרון הכללי יהיה

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

נחלק למקרים לפי המשוואה האופיינית:

1. לפולינום האופייני יש שני שורשים ממשיים שונים, λ_1וλ_2. אז $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}$. הפתרון הכללי יהיה:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

בשביל למצוא את c_1, c_2 צריך שני תנאי התחלה.
דוגמאות:
א. $2y'' - y' - y = 0$
פתרון: הפולינום האופייני של המד"ר הוא $2\lambda^2 - \lambda - 1$. השורשים הם: $1, -\frac{1}{2}$.

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}$$

ב. $y'' - 4y' + 3y = 0$
פתרון: הפולינום האופייני הוא $\lambda^2 - 4\lambda + 3$
השורשים שלו הם: $1, 3$. ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x}$$

2. לפולינום האופייני יש שורש ממשי יחיד. $\lambda=-\dfrac{b}{2a}$.

אנחנו מקבלים פתרון $y_1=e^{-\frac{b}{2a}x}$.

אנחנו צריכים לייצר עוד פתרון שהוא לא כפל בסקלר.

טענה: $y_2=xy_1=xe^{-\frac{b}{2a}x}$ גם מהווה פתרון.

בשביל להוכיח את הטענה צריך לחשב את הנגזרות ולהציב במד"ר.

$y_2'=e^{-\frac{b}{2a}x}-\dfrac{b}{2a}xe^{-\frac{b}{2a}x}$

$y_2''=-\dfrac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}x}-\dfrac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}x}+(\dfrac{b}{2a})^2xe^{-\frac{b}{2a}x}$

לפני שנציב , ניזכר כי העובדה שיש פתרון יחיד לפולינום האופייני אומרת שהדלתא שווה 0.

כלומר, $b^2-4ac=0$.

נציב את y_2 וניגזרותיו במד"ר.

$$a(-\frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}x}-\frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}x}+(\frac{b}{2a})^2xe^{-\frac{b}{2a}x})+b(e^{-\frac{b}{2a}x}-\frac{b}{2a}xe^{-\frac{b}{2a}x})$$

$$+c(xe^{-\frac{b}{2a}x})\stackrel{?}{=}0$$

נחלק ב $e^{-\dfrac{b}{2a}x}$.

נישאר עם

$$a(-\frac{b}{2a}-\frac{b}{2a}+(\frac{b}{2a})^2x)+b(1-\frac{b}{2a}x)+cx\stackrel{?}{=}0$$

$$-b+\frac{b^2}{4a}x+b-\frac{b^2}{2a}x+cx\stackrel{?}{=}0$$

$$(\frac{-b^2}{4a}+c)x\stackrel{?}{=}0$$

$$(\frac{-b^2+4ac}{4a})x=0$$

כי במונה יש את מינוס הדלתא שאנחנו יודעים שמתאפס.

מסקנה: הפתרון הכללי הוא:

$$y=c_1e^{\lambda x}+c_2xe^{\lambda x}$$

תרגילים:

א. $y''-4y'+4y=0$

פתרון: הפולינום האופייני הוא $\lambda^2-4\lambda+4$. יש לו שורש יחיד, $\lambda=2$. לכן הפתרון הכללי הוא:

$$y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$$

ב. $y'' - 6y' + 9y = 0$
פתרון: הפולינום האופייני הוא $\lambda^2 - 6\lambda + 9$. יש לו שורש יחיד, $\lambda = 3$. לכן הפתרון הכללי הוא

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$$

3. לפולינום האופייני יש שני שורשים שאינם ממשיים (דלתא קטנה מ0).
שני השורשים יהיו מהצורה $\alpha + \beta i$ ו$\alpha - \beta i$.
לכאורה צריך להיות פתרון $y = e^{(\alpha+\beta i)x}$
אבל זאת לא פונקציה ממשית.
למה הפונקציה הזאת שווה?

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x} cis(\beta x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x) + i e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

למעשה החלק הממשי והחלק המדומה יהיו פתרונות ממשיים.
כלומר, $y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x), y_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$. והפתרון הכללי הוא:

$$y = c_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

מספיק לקחת שורש אחד ולעבוד איתו. כי השורש השני יוצר את אותן פונקציות.
דוגמאות:
א. $y'' + 6y' + 25y = 0$
פתרון: הפולינום האופייני הוא $\lambda^2 + 6\lambda + 25$. השורשים שלו הם: $-3 + 4i, -3 - 4i$.
נבחר אחד מהם- $-3 + 4i$.
$\alpha = -3, \beta = 4$.

$$y = c_1 e^{-3x}\cos(4x) + c_2 e^{-3x}\sin(4x)$$

ב. $y'' + 9y = 0$
פתרון: הפולינום האופייני הוא $\lambda^2 + 9$. השורשים שלו הם $\pm 3i$.
נבחר את $3i$. $\alpha = 0, \beta = 3$.

$$y = c_1 e^{0x}\cos(3x) + c_2 e^{0x}\sin(3x) = c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x)$$

תרגיל פיזיקלי

תזכורת: כשיש לנו גוף שנע במרחב, אז אנחנו מתארים את התנועה שלו ע"י פונקציות.
המיקום שלו מסומן ב$y(t)$- פונקציה של הזמן.

מהירות התנועה היא $y'(t)$.
התאוצה היא $y''(t)$.
החוק השני של ניטון:

$$\sum F = ma = my''$$

סכום הכוחות שפועלים על גוף= מסת הגוף כפול התאוצה.
אנחנו הולכים לנתח את המקרה של גוף שמחובר לקפיץ.
כאשר יש גוף שמחובר לקפיץ, ומותחים את הקפיץ, אז הקפיץ מפעיל כח על הגוף.
הכח שהקפיץ מפעיל על הגוף הוא כח שתלוי במיקום של הגוף, ותלוי בחומר שממנו הקפיץ עשוי, מסמנים את המקדם הזה בk. הכח הזה פועל נגד כיוון התנועה.

$$-ky = my''$$

זאת המשוואה.

$$my'' + ky = 0$$

נחלק בm.

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0$$

$\frac{k}{m} > 0$, ובעולם הפיזיקלי מקובל לסמן אותו בω^2.

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

נפתור אותה.
הפולינום האופייני: $\lambda^2 + \omega^2 = 0$. השורשים: $\pm\omega i$.
לכן הפתרון הכללי: $\alpha = 0, \beta = \omega$.

$$y = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

נציב תנאי התחלה.
נניח שהגוף התחיל במנוחה. כלומר, בשניה 0 המהירות שלו היא 0.
בנוסף, נניח שמתחתנו את הקפיץ 10 ס"מ בכיוון השלילי. כלומר, בשניה 0 המיקום שלו הוא -10.
עכשיו אנחנו יכולים למצוא את הפונקציה המפורשת שמתארת את התנועה.
יש לנו שני תנאים.

$$y(0) = -10$$

$$y'(0) = 0$$

נתחיל בלהציב את המשוואה הראשונה.

$$-10 = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0)$$

$$-10 = c_1$$

$$y' = -\omega c_1 \sin(\omega t) + \omega c_2 \cos(\omega t)$$

מצאנו ש$c_1 = -10$.

$$y' = 10\omega \sin(\omega t) + \omega c_2 \cos(\omega t)$$

נציה את התנאי השני : $y'(0) = 0$.

$$0 = 10\omega \sin(0) + \omega c_2 \cos(0)$$

$$c_2 = 0$$

לכן סה"כ הפתרון הפרטי הוא :

$$y = -10 \cos(\omega t)$$

מהפונקציה שקיבלנו אנחנו לומדים שהתנועה של הגוף תהיה מחזורית, בטווח של 10 ס"מ לפני ואחרי נקודת שיווי המשקל של הקפיץ. והגוף ינוע לנצח קדימה-אחורה קדימה-אחורה.
זה אומר שאם אין כוחות אחרים שפועלים על הגוף, מלבד הקפיץ, ואנחנו מותחים את הקפיץ 10 ס"מ בכיוון מסויים ועוזבים, אז הגוף ינוע לנצח קדימה ואחורה בטווח של 10 ס"מ לכל כיוון.
במציאות יש עוד כוחות, ולכן הגוף לא באמת ינוע לנצח.
בשיעור הבא ננתח את המקרה שבו יש גם כח חיכוך.