

שאלון בחינה בקורס: חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 (89-218)

סמסטר ב; מועד א. תשע"א

שם המרצה: ד"ר שחר נבו.

משך הבחינה $2\frac{3}{4}$ שעות.

ללא חומר עזר, דף נוסחאות מצורף

ענה על 5 מתוך 6 השאלות הבאות. נמק תשובותיך.

1. א. חשב $\ln 7$ לפי 3 איברים ראשונים שונים מאפס של $\ln \frac{1+x}{1-x}$. מצא הערכה לשגיאה.

ב. גרף הפרבולה $f(x) = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ מסתובב סביב ציר y . מצא שטח פנים של גוף הסיבוב שנוצר.

2. א. מצא האינטגרל הלא מסוים $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$.

ב. גרף הפונקציה $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 1}$, $0 \leq x \leq 1$ מסתובב סביב ציר x . מצא נפח גוף הסיבוב שנוצר.

3. א. מצא רדיוס ההתכנסות R של טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$. בדוק התכנסות ב $x = \pm R$.

ב. האם קיים האינטגרל הלא אמיתי $\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$.

4. פתור באופן כללי את מערכת המשוואות הדיפרנציאלית $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 \\ y_2' = 4y_1 - y_2 \end{cases}$ מצא פתרון $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

המקיים $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

5. א. פתור את המד"ר $xy' - 2y = 2x^4$ עם תנאי התחלה $y(1) = 1$.

ב. פתור את המד"ר $y'x + y = y^2$ עם תנאי התחלה $y(1) = \frac{1}{2}$.

6. א. מצא האינטגרל הלא מסוים $\int x^3 \ln x dx$

ב. חשב e^A באשר $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ רמז: עדיף בלי למצוא את צורת ז'ורדן של A .

בהצלחה!

פתרון

שאלה 1

א. חשב $\ln 7$ לפי 3 איברים ראשונים שונים מאפס של $\ln \frac{1+x}{1-x}$. מצא הערכה לשגיאה.

ב. גרף הפרבולה $f(x) = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ מסתובב סביב ציר y . מצא שטח פנים של גוף הסיבוב שנוצר.

פתרון

א. נחשב את $f(0), f'(0), f''(0), f^{(3)}(0)$ כאשר $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{2}{1-x^2} \Rightarrow f'(0) = 2$$

$$f''(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2} \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{12x^2 + 4}{(1-x^2)^3} \Rightarrow f^{(3)}(0) = 4$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{48x^3 + 48x}{(1-x^2)^4} \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{-144x^4 + 480x^2 + 48}{(1-x^2)^5} \Rightarrow f^{(5)}(0) = 48$$

נקבל שפולינום טיילור הוא $p_4(x) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5$.

נפתור את המשוואה $\frac{1+x}{1-x} = 7$ ונקבל $x = \frac{3}{4}$ ולכן $\ln 7 \approx 2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 \approx 1.876$

ב. נחשב את שטח הפנים

$$S = 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1+(2x)^2} dx = 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1+4x^2} dx = \frac{\pi}{6} \cdot \left[(1+4x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{5\sqrt{5}-1}{6} \pi$$

שאלה 2

א. מצא האינטגרל הלא מסוים $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$.

ב. גרף הפונקציה $f(x) = \sqrt[4]{x^2+1}$, $0 \leq x \leq 1$ מסתובב סביב ציר x . מצא נפח גוף הסיבוב שנוצר.

פתרון

א. נציב $t = \ln x$ $dt = \frac{dx}{x}$ $\int \sin t dt = -\cos t = -\cos(\ln x)$.

$$b. \pi \int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx = \pi \left[\frac{x}{2} \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln|x+\sqrt{x^2+1}| \right]_0^1 = \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \ln(1+\sqrt{2}) \right)$$

שאלה 3

א. מצא רדיוס ההתכנסות R של טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$. בדוק התכנסות ב $x = \pm R$.

ב. האם קיים האינטגרל הלא אמיתי $\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$.

פתרון

א. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$ ולכן $R = 1$. אם $x = 1$ נקבל את הטור המתבדר $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

אם $x = -1$ נקבל את הטור המתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

ב. לכל $x \in [1, \infty)$ נקבל ש $\frac{\pi}{4} \leq \arctan x < \frac{\pi}{2}$ ולכן ניתן להשתמש במבחן השוואה הראשון.

$$x \in [1, \infty) \text{ לכל } \frac{\arctan x}{x^2} \leq \frac{\pi}{2x^2}$$

מכיוון ש $\int_1^{\infty} \frac{\pi}{2x^2} dx$ מתכנס נקבל שהאינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$ קיים.

שאלה 4

פתור באופן כללי את מערכת המשוואות הדיפרנציאלית $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 \\ y_2' = 4y_1 - y_2 \end{cases}$ מצא פתרון $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ המקיים

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

פתרון

$$\lambda = 1 \Leftarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftarrow (\lambda - 3)(\lambda + 1) + 4 = 0 \Leftarrow \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ -4 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

נקבל ש $y_1' = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x \Leftarrow y_1 = c_1 e^x + c_2 x e^x$ ונציב במשוואה הראשונה ונקבל

$$y_2 = 2c_1 e^x - c_2 e^x + 2c_2 x e^x \Leftarrow c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x = 3c_1 e^x + 3c_2 x e^x - y_2$$

נתון ש $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ולכן $\begin{cases} c_1 = 1 \\ 2 \cdot 1 - c_2 = 2 \Rightarrow c_2 = 0 \end{cases}$ והפתרון הוא $y_1 = e^x, y_2 = 2e^x$

שאלה 5

א. פתור את המד"ר $xy' - 2y = 2x^4$ עם תנאי התחלה $y(1) = 1$.

ב. פתור את המד"ר $y'x + y = y^2$ עם תנאי התחלה $y(1) = \frac{1}{2}$.

פתרון שאלה 5

א. נפתור את המשוואה $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$. תחילה נפתור את המשוואה ההומוגנית $y' - \frac{2}{x}y = 0$.

פתרון פרטי של המשוואה הלא הומוגנית הוא $y = x^4$ ולכן הפתרון הכללי של

המשוואה הלא הומוגנית הוא $y = cx^2 + x^4$ נתון בנוסף ש $y(1) = 1$ ולכן $c = 0$ והפתרון הוא $y = x^4$.

ב. נשים לב שמדובר במשוואת ברנולי. נחלק ב xy^2 ונקבל $\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x}$ נציב $t = \frac{1}{y}$ $t' = -\frac{y'}{y^2}$

$$t' - \frac{t}{x} = -\frac{1}{x} \quad \text{נפתור תחילה את המשוואה ההומוגנית} \quad t' - \frac{t}{x} = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow -t' + \frac{t}{x} = \frac{1}{x}$$

$$t = ce^{\int \frac{1}{x} dx} \Rightarrow t = cx$$

הפתרון הכללי של המשוואה הלא הומוגנית הוא $t = cx + 1$ $y = \frac{1}{cx + 1}$ נתון בנוסף ש $y(1) = \frac{1}{2}$

ולכן הפתרון הוא $y = \frac{1}{x+1}$

שאלה 6

א. מצא האינטגרל הלא מסויים $\int x^3 \ln x dx$

ב. חשב e^A באשר $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ רמז: עדיף בלי למצוא את צורת ז'ורדן של A.

פתרון שאלה 6

1. חשב $\int x^3 \ln x dx$.

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$v = \frac{x^4}{4} \quad u = \ln x$$

$$v' = x^3 \quad u' = \frac{1}{x}$$

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \int \frac{x^3}{4} dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16}$$

ב. $e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ש מכיוון $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 מכיוון

$$e^A = e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$