אנליזה מודרנית – תרגול 7

פונקציית קנטור

<u>תזכורת:</u> קבוצת קנטור C מוגדרת ע"י חיתוך הקבוצות $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$, וכפי שראינו בתרגול השני ניתן לרשום גם $C=\{x=0.x_1x_2x_3\ldots_3 : \forall i\ x_i\in\{0,2\}\}$

נגדיר פונקציה $f:[0,1]\to[0,1]$ באופן הבא :

ראשית, נגדיר את הפונקציה על קבוצת קנטור. לכל $x=0.x_1x_2x_3\ldots\in C$ נחלק את הספרות הטרינאריות שלו ב-2 ונפרש את התוצאה כמספר בינארי. במילים אחרות התהליך הוא כנ"ל:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n}\mapsto\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n/2}{2^n}=f(x)$$

ואם $x\notin C$, אזי x נמצא באחד מהקטעים הפתוחים $\left(\frac{k}{3^n},\frac{k+1}{3^n}\right)$ שהסרנו בבניית קבוצת קנטור. (כמו למשל $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right),\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$) במקרה זה ניתן ל- x את הערך של פונקציית קנטור בקצות הקטע הזה , שבוודאי נמצאים בקבוצת קנטור (אין חשיבות לבחירת הקצה, שכן ערך הפונקציה זהה בשניהם).

לפונקציה f קוראים פונקציית קנטור, ויש לה תכונות ייחודיות ההופכות אותה לדוגמה נגדית חשובה.

<u>דוגמאות:</u>

$0=0.000\ldots_3\in C$ **ולכן** $f(x)=0.000\ldots_2=0$

$1=0.222\ldots_3\in C$ **ולכן** $f(1)=0.111\ldots_2=1$

$\frac{1}{3}=0.1_3=0.0222\ldots_3\in C$ **ולכן** $f\left(\frac{1}{3}\right)=0.0111\ldots_2=\frac{1}{2}$

$\frac{2}{3}=0.2_3\in C$ **ולכן** $f\left(\frac{2}{3}\right)=0.1_2=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}=0.111\ldots_3\notin C$ הוסר יחד עם הקטע $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ **ולכן** $f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}$.

נוכיח מספר תכונות:

א. תמונת קבוצת קנטור תחת פונקציית קנטור היא כל הקטע $[0,1]$

ב. פונקציית קנטור היא מונוטונית עולה חלש בקטע $[0,1]$

ג. פונקציית קנטור היא רציפה.

ד. פונקציית קנטור גזירה כב"מ בקטע $[0,1]$ עם נגזרת 0 (לפי מידת לבג m)

<u>הוכחה:</u>

א. יש להראות $f[C]=[0,1]$. נראה הכלה דו-כיוונית.

$\subseteq$: יהי $a\in f[C]$. קיים $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n}\in C$ עבורו $a=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n/2}{2^n}$. הספרות $\{x_n\}$ כזכור הן 0 או 2, ולכן:

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0/2}{2^n}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n/2}{2^n}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$$

ולכן $a=f(x)\in[0,1]$

$\supseteq$: יהי $a\in[0,1]$ אזי יש לו פיתוח בינארי $a=0.a_1a_2a_3\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$ שבו כל הספרות הן 0 או 1. נכפיל את הספרות פי 2 ונפרש את התוצאה כמספר טרינארי $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a_n}{3^n}$. זהו מספר בקבוצת קנטור ומתקיים $f(x)=a$ ולכן $a\in f[C]$.

ב. יש להראות כי אם $x,y\in[0,1]$ מקיימים $x<y$ אזי $f(x)\le f(y)$.

נוכיח תחילה את המקרה שבו $x,y\in C$: ובכן $x<y$ ולכן יהי N מיקום הספרה הטרינארית הראשונה שבה x ו- y לא מתלכדים. (כלומר $x_N=0<2=y_N$, ולכל $n<N$, $x_n=y_n$). אם כך

$$f(y)-f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n/2-x_n/2}{2^n}=\sum_{n=1}^{N-1}0+\frac{y_N/2-x_N/2}{2^N}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{y_n/2-x_n/2}{2^n}=$$

$$=\frac{1}{2^N}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{y_n/2-x_n/2}{2^n}\ge\frac{1}{2^N}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{0-1}{2^n}=\frac{1}{2^N}-\frac{1}{2^N}=0$$

ובמקרה שבו $x<y\in[0,1]$ כלשהם נמצא מספרים $x',y'\in C$ המקיימים $x'\le x$ ו- $y'\ge y$ וגם $f(x')=f(x)$ ו- $f(y')=f(y)$. וע"פ המקרה הקודם $f(x')\le f(y')$ ולכן גם $f(x)\le f(y)$ וסיימנו.

ג. f מונוטונית עולה, וידוע מאינפי' שנקודות אי הרציפות של פונקציות מונוטוניות הן מסוג קפיצה בלבד. אבל קפיצה לא תתכן כי אז לא יתקיים $f[C]=[0,1]$.

ד. נוכיח ש- $f'(x)=0$ לכל $x\in C^c=[0,1]\setminus C$. ובכן יהי $x\in[0,1]\setminus C$ אזי x נמצא באחד הקטעים הפתוחים $\left(\frac{k}{3^n},\frac{k+1}{3^n}\right)$, שהסרנו בבניית קבוצת קנטור, ושם f קבועה. אם ניקח h קטן דיו, יתקיים $f(x+h)=f(x)$ ולכן $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\xrightarrow{h\to 0}0=f'(x)$.

הקבוצה שבה לא ראינו גזירות היא קבוצת קנטור, שמידתה (לבג) אפס ולכן כב"מ.

1. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ מדידה לבג. אזי לכל $\varepsilon>0$ קיימת פונקציה רציפה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אשר מתאפסת מחוץ לקבוצה חסומה ו $\int|f-g|dm<\varepsilon$.

פתרון: נוכיח זאת בכמה שלבים:

א. אם $-\infty<a<b<\infty$ אזי לכל $\delta\in\left(0,\frac{b-a}{2}\right)$ ונסתכל על הפונקציות $\tau_{a,b,\delta}$ אשר מקבלות 1 על $x\in(a+\delta,b-\delta)$, 0 מחוץ לקטע (a,b) ולינאריות על $[a,a+\delta]$ ו $[b-\delta,b]$. ברור כי לכל קטע (a,b) נוכל לבחור קטע $(a+\delta,b-\delta)$ כך ש $m\left((a,b)\setminus(a+\delta,b-\delta)\right)<\varepsilon$. מכאן ש $\int\left|\tau_{a,b,\delta}-1_{(a,b)}\right|dm<\varepsilon$.

ב. ראינו בהרצאה כי אם E מדידה לבג ו $m(E)<\infty$ אז ניתן למצוא קטעים זרים ופתוחים $I_1,I_2,...,I_l$ כך ש $m\left(E\Delta\bigcup_{i=1}^{l}I_i\right)<\frac{\varepsilon}{2}$. מכאן ש $\int\left|\sum_{i=1}^{l}1_{I_i}-1_E\right|dm<\frac{\varepsilon}{2}$.

מצד שני עפ"י משראינו נובע כי ניתן לבחור δ כזאת כך ש $\int\left|\tau_{I_i,\delta}-1_{I_i}\right|dm<\frac{\varepsilon}{2l}$

ומכאן ש $\int\left|\sum_{i=1}^{l}\tau_{I_i}-\sum_{i=1}^{l}1_{I_i}\right|dm<\sum_{i=1}^{l}\frac{\varepsilon}{2l}=\frac{\varepsilon}{2}$. ועכשיו, אם נסמן $\psi=\sum_{i=1}^{l}\tau_{I_i}$, נובע כי $\int|\psi-1_E|dm<\varepsilon$.

ג. למדנו כי אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ אינטגרבילית אז קיימת פונקציה פשוטה $\varphi=\sum_{i=1}^{N}c_kI_{E_i}$ ואינטגרבילית כך ש $\int|\varphi-f|dm<\frac{\varepsilon}{2}$. מהעובדה כי φ אינטגרבילית נובע כי $m(E_i)<\infty$ לכל i. עפ"י שלב ב נוכל למצוא פונקציה ψ_j רציפה כך ש $\int\left|\psi_j-1_{E_j}\right|dm<\frac{\varepsilon}{2N|c_j|}$. נסמן $g=\sum_{i=1}^{l}\psi_j$ וקיבלנו

$$\begin{aligned}\int|g-f|\,dm &\le \int|g-\varphi|\,dm+\int|\varphi-f|\,dm\\ &\le \sum_{j=1}^{N}\int\left|c_j\psi_j-c_j1_{E_j}\right|dm+\frac{\varepsilon}{2}\\ &\le \sum_{j=1}^{N}\left|c_j\right|\frac{\varepsilon}{2N\left|c_j\right|}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

2. תהי $f\in L^1(\mathbb{R})$ ויהי $\alpha\neq 0$. הראו ש $f(\alpha x)\in L^1(\mathbb{R})$ ושמתקיים

$$\int_{\mathbb{R}} f(\alpha x)m(dx)=\frac{1}{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}} f(x)m(dx)$$

מה עם האינטגרל הוא על הקטע $[a,b]$?

פתרון: מספיק להוכיח עבור f חיובית ואז לפרק $f=f^+-f^-$. מכיוון ש f מדידה נוכל למצוא סדרה של פונקציות פשוטות $\phi_n(x)\uparrow f(x)$ נקודתית. מכאן נובע כי $\phi_n(\alpha x)\uparrow f(\alpha x)$ נקודתית. כעת,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}\phi_n(\alpha x)m(dx)=\int_{\mathbb{R}}\sum_{i=1}^{n}c_i1_{E_i}(\alpha x)m(dx)=\sum_{i=1}^{n}c_i m\left(\{x:\alpha x\in E_i\}\right)\\ &=\sum_{i=1}^{n}c_i m\left(\left\{x:x\in\frac{1}{\alpha}E_i\right\}\right)=\sum_{i=1}^{n}c_i m\left(\frac{E_i}{\alpha}\right)=\frac{1}{|\alpha|}\sum_{i=1}^{n}c_i m(E_i)=\frac{1}{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}}\phi_n(x)m(dx)\end{aligned}$$

נשאיף את שני האגפים לאינסוף וממשפט ההתכנסות המונוטונית נובע כי

$$\int_{\mathbb{R}} f(\alpha x)m(dx)=\lim\int_{\mathbb{R}}\phi_n(\alpha x)m(dx)=\lim\frac{1}{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}}\phi_n(x)m(dx)=\int_{\mathbb{R}} f(x)m(dx).$$

כאשר האינטגרל הוא על הקטע $[a,b]$, נרשום

$$\int_a^b f(\alpha x)m(dx)=\int_{\mathbb{R}}1_{[a,b]}\left(\alpha\frac{x}{\alpha}\right)f(\alpha x)m(dx)=\int_{\mathbb{R}}1_{[a\alpha,b\alpha]}(\alpha x)f(\alpha x)m(dx)$$

עפ"י מה שראינו נובע כי

$$\int_{\mathbb{R}}1_{[a\alpha,b\alpha]}(\alpha x)f(\alpha x)m(dx)=\frac{1}{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}}1_{[a\alpha,b\alpha]}(x)f(x)m(dx)=\frac{1}{|\alpha|}\int_{a\alpha}^{b\alpha}f(x)m(dx)$$