תרגיל 7- מרחב וקטורי ותת מרחב וקטורי

שאלה 1

V אינו מרחב וקטורי. נראה שאחד מהתכונות לא מתקיימות:

חוק הקיבוץ לא מתקיים:

$$[(x_1,x_2)+(y_1,y_2)]+(z_1+z_2)=(x_1+y_1,x_2-y_2)+(z_1,z_2)=(x_1+y_1+z_1,x_2-y_2-z_2)$$
$$(x_1,x_2)+[(y_1,y_2)+(z_1+z_2)]=(x_1,x_2)+(y_1+z_1,y_2-z_2)=(x_1+y_1+z_1,x_2-(y_2-z_2))=(x_1+y_1+z_1,x_2-y_2+z_2)$$

אין שיוויון ולכן V אינו מרחב וקטורי.

שאלה 2

א.

$$W=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid (a_1-a_2)^2+a_3{}^2=0\right\}$$

סכום של שני דברים נותן אפס בתנאי שכל אחד אפס. ולכן נקבל:

$(a_1-a_2)^2=0\Leftrightarrow a_1-a_2=0\Leftrightarrow a_1=a_2$ וגם $a_3=0$.

ולכן, בעצם W זה וקטורים מהצורה: $\begin{pmatrix}a\\a\\0\end{pmatrix}$.

נראה ש-W תת מרחב.

- $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\in W$
- סגירות לחיבור: יהיו $\begin{pmatrix}a\\a\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b\\b\\0\end{pmatrix}\in W$. $\begin{pmatrix}b\\b\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\a\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\a+b\\a+b\end{pmatrix}\in W$.

  $(a+b-(a+b))^2+(0)^2=0$
- סגירות לכפל בסקלר: $\begin{pmatrix}a\\a\\0\end{pmatrix}\in W$, ו- $\alpha\in\mathbb{R}$. $\alpha\begin{pmatrix}a\\a\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a\\\alpha a\\0\end{pmatrix}\in W$.

  $(\alpha a-\alpha a)^2+(0)^2=0$.

ב.

$$U=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid a_1\cdot a_2=0\right\}:$$

U אינו תת מרחב. נראה שאין סגירות לחיבור.

$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\in U$. אבל: $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}\notin U$.

ג. יהי $V=\mathbb{R}^n$ המרחב הוקטורי הרגיל מעל $\mathbb{R}$.

$$W=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n \mid a_1+a_2+\ldots+a_n=0\right\}$$

נראה ש-W תת מרחב.

- $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\in W$
- סגירות לחיבור: יהיו $\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}\in W$.אז: $a_1+\cdots+a_n=0$ וגם $b_1+\cdots+b_n=0$.

  $\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1+a_1\\ \vdots\\ b_n+a_n\end{pmatrix}\in W$ משום ש:

  $$(a_1+b_1)+\cdots+(a_n+b_n)=(a_1+\cdots+a_n)+(b_1+\cdots+b_n)=0+0=0$$

- סגירות לכפל בסקלר: $\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\in W$, ו- $\alpha\in\mathbb{R}$. $\alpha\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a_1\\ \vdots\\ \alpha a_n\end{pmatrix}\in W$ משום ש:

  $$\alpha a_1+\cdots+\alpha a_n=\alpha(a_1+\cdots+a_n)=\alpha 0=0$$

שאלה 3

א. כדי למצוא בסיס, נמצא איזה וקטורים לא תויים לינארית ולכן נכניס אותם בתור שורות למטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix}1&-7&-5&1\\1&-5&-4&2\\1&1&-1&5\\2&-4&-5&7\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{R_2\leftarrow R_2-R_1\\R_3\leftarrow R_3-R_1\\R_4\leftarrow R_4-2R_1}]{}\begin{pmatrix}1&-7&-5&1\\0&2&1&1\\0&8&4&4\\0&10&5&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{R_3\leftarrow R_3-4R_2\\R_4\leftarrow R_4-5R_2}]{}\begin{pmatrix}1&-7&-5&1\\0&2&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

ולכן 2 הוקטורים העליונים בת"ל. ולכן הם מהווים את הבסיס ל-W. כלומר:

$\{(1\ \ -7\ \ -5\ \ 1),(1\ \ -5\ \ -4\ \ 2)\}$ הבסיס ל-W.

ב. כמו בסעיף הקודם, נכניס למטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&0&1\\0&-1&-1\\2&4&0\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\leftarrow R_4-2R_1]{R_2\leftarrow R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-4&-5\\0&-1&-1\\0&0&-6\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2\leftarrow R_2-4R_3]{}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&-1\\0&-1&-1\\0&0&-6\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\leftarrow R_4-6R_2]{}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&-1\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן הוקטורים שבת"ל הם: $\{(1\ \ 2\ \ 3),(2\ \ 0\ \ 1),(0\ \ -1\ \ -1)\}$ ולכן הם מהווים את הבסיס ל-U.

שאלה 4

א. נמצא בסיס למרחב השורות ע"י כך שנדרג את המטריצה והבסיס יהיה השורות שלא מתאפסות.

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&3&2&4\\2&0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-2R_1]{R_2\leftarrow R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&2&1&3\\0&-2&-1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3+R_2]{}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&2&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן הבסיס למרחה השורות הוא: $\{(1\ \ 1\ \ 1\ \ 1),(1\ \ 3\ \ 2\ \ 4)\}$

ב. נמצא בסיס למרחב העמודות ע"י כך שנדרג את המטריצה והבסיס יהיה העמודות עם האיברים המובילים:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&3&2&4\\2&0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-2R_1]{R_2\leftarrow R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&2&1&3\\0&-2&-1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3+R_2]{}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&2&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לעמודה הראשונה והשנייה של המטריצה יש איברים מובילים ולכן הבסיס של מרחב העמודות הוא:
$\{(1\ \ 1\ \ 2),(1\ \ 3\ \ 0)\}$