תורת הקבוצות — תרגיל בית 6

חיים שרגא רוזנר

י"ט באייר, תשע"ה*

תקציר

חזקות סודרים.

תזכורות

1. יהי α סודר. חזקת סודרים מוגדרת ברקורסיה כך:
   (א) $\alpha^0 := 1$.
   (ב) $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$.
   (ג) עבור סודר גבולי β, $\alpha^\beta = \sup\left\{\alpha^\gamma : \gamma < \beta\right\}$.
2. תכונות שהוכחו בכיתה:
   (א) אם $\alpha > 1$, $\beta_1 < \beta_2$, אזי $\alpha^{\beta_1} < \alpha^{\beta_2}$. יש גם גרסה שבה כל האי־שוויונות מוחלפים בגרסה הכהה שלהם (דהיינו $\leq \mapsto <$).
   (ב) אם $\alpha > 1$, $f(\beta) = \alpha^\beta$ מונוטונית ורציפה.
   (ג) אם $\alpha > 0$, $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$.

1 חזקות סודרים

1. <u>רשות</u>: הגדרה עצמית של חזקות סודרים. יהיו α, β סודרים, ותהי $f : \beta \to \alpha$ פונקציה. נגדיר את ה**תומך** של f להיות כל האיברים התחום שתמונתם איננה אפס.

$$\operatorname{supp}(f) := \left\{\delta \in \beta : f(\delta) \neq 0\right\}$$

נביט כעת בקבוצת הפונקציות מ־β ל־α שלהן תומך סופי:

$$E(\beta, \alpha) := \left\{f \text{ is a function from } \beta \text{ to } \alpha : \operatorname{supp}(f) \text{ is finite.}\right\}$$

על קבוצה זו נגדיר יחס סדר כדלהלן: נניח $f, g \in E(\beta, \alpha)$ פונקציות שונות זו מזו. נביט באיבר המקסימלי δ עבורו $f(\delta) \neq g(\delta)$. (נמקו מדוע קיים מקסימום כזה!) נסמן $f \prec g$ אם $f(\delta) < g(\delta)$. אנו טוענים כי $\prec$ הוא סדר טוב על הקבוצה $E(\beta, \alpha)$, ולפיכך נגדיר $\alpha^\beta := \operatorname{type}(E(\beta, \alpha), \prec)$.

* להגשה עד יום **חמישי** ג' בסיון (21 מאי) לתא מספר 45 בתאי המילגאים של המחלקה למתמטיקה.

(א) במקום להוכיח שזה אכן סדר טוב, הראו כי לכל $\alpha > 0$ ההגדרה הזו מתלכדת עם ההגדרה שהובאה בתזכורת. מכיוון שלפי ההגדרה מהתזכורת, החזקה היא סודר, הרי $\prec$ הוא סדר טוב על $E(\beta, \alpha)$.

(ב) הראו במישרין מן ההגדרה הזו את התכונות של חזקות סודרים, הן אלו שהובאו בתזכורת והן אלו שיובאו להלן.

2. יהי α סודר. חשבו את ערכו של כל אחד מהביטויים הבאים: $0^{\alpha}, 1^{\alpha}, \alpha^{1}$.

3. יהיו α, β, γ סודרים, $\alpha > 0$. הראו כי $\left(\alpha^{\beta}\right)^{\gamma} = \alpha^{\beta\gamma}$.

4. מונוטוניות חלשה של חזקת סודרים. נניח כי $0 < \alpha_1 \le \alpha_2$, $\beta_1 \le \beta_2$.הראו כי $\alpha_1^{\beta_1} \le \alpha_2^{\beta_2}$.

2 הגדרות רקורסיביות

כפי שהגדרנו כאן חזקות סדורים בעזרת רקורסיה, ניתן להגדיר גם חיבור סודרים וכפל סודרים בעזרת רקורסיה (בהסתמך על פעולת העוקב $S \colon \alpha \mapsto S(\alpha)$).

1. הגדירו האופן רקורסיבי חיבור סודרים.

2. הגדירו באופן רקורסיבי כפל סודרים.

ב ה צ ל ח ה!