# ערכים עצמיים

(לתת קצת מוטיבציה למה זה חשוב, גם במדמ"ח!)

דוג': נתונה $A=\begin{pmatrix}2&3\\4&1\end{pmatrix}$

מתקיים $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$ אז $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

**הגדרה:** תהי $A\in \mathbb{F}^{n\times n}$

אם קיים $0\neq v\in \mathbb{F}^n$ כך ש- $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$ עבור סקלר $\lambda\in\mathbb{F}$

אז נאמר ש- $\lambda$ הוא "ערך עצמי" של $A$

וש- $v$ הוא "וקטור עצמי" של $A$ עבור ע"ע $\lambda$.

[ערך עצמי = ע"ע, וקטור עצמי = ו"ע]

♡: $Av=\lambda v \quad v\neq 0$

$$\Downarrow$$

$$Av-\lambda v=0 \Leftarrow (A-\lambda I)v=0$$

$$|A-\lambda I|=0$$

כי יש למטריצה $B=A-\lambda I$ פתרון לא טריוויאלי, שהרי $v\neq 0$.

**דוגמה:** $A=\begin{pmatrix}-3&1&-1\\-5&3&-1\\-6&6&-4\end{pmatrix}$ מצא ע"ע ואת ו"ע.

**פתרון:** מציאת ע"ע: על מנת למצוא ע"ע קודם רוצים למצוא את ה-$\lambda$-ות שמקיימות $|A-\lambda I|=0$.

$$|A-\lambda I|=\left|\begin{pmatrix}-3-\lambda&1&-1\\-5&3-\lambda&-1\\-6&6&-4-\lambda\end{pmatrix}\right| \underset{\substack{\text{נפשט}\\\text{לפי מינורים}\\\text{לפי שורה ראשונה}}}{=} (-3-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda&-1\\6&-4-\lambda\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-5&-1\\-6&-4-\lambda\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}-5&3-\lambda\\-6&6\end{vmatrix}$$

$$=(-3-\lambda)\Big[\underbrace{(3-\lambda)(-4-\lambda)-(-6)}_{\lambda^2+\lambda-6}\Big]-\Big[-5(-4-\lambda)-6\Big]-\Big[-5\cdot 6-(3-\lambda)\cdot(-6)\Big]$$

$$=-(3+\lambda)(3+\lambda)(\lambda-2)-20-5\lambda+6+30-18+6\lambda$$

$$=-(3+\lambda)^2(\lambda-2)-2+\lambda=(\lambda-2)\left(1-(\lambda+3)^2\right)=(\lambda-2)(\lambda+4)(-\lambda-2)$$

2

מחפשים $\lambda$-ות כך ש- $|A-\lambda I| = 0$

$\Rightarrow$

$$(\lambda-2)(\lambda+4)(-\lambda-2) = 0$$

⇐ יש 3 ע"ע $\boxed{\lambda_1=2\ ,\ \lambda_2=-2\quad \lambda_3=-4}$

<u>נמצא ו"ע</u>:

(1) <u>עבור ע"ע $\lambda_1=2$</u>: נחפש את ה- v שמקיים $(A-\overset{\lambda}{2}I)v=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3-2 & 1 & -1 & 0 \\ -5 & 3-2 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & -4-2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \text{במחברת} \ldots \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

<u>הפעולות</u>: ① $R_2-R_1$ ② $R_3 \leftrightarrow R_2$ ③ $\frac{1}{6}R_2$ ④ $R_1+5R_2$ ⑤ $\frac{1}{4}R_1$ ⑥ $R_1 \leftrightarrow R_2$

$$\begin{cases} z=t \\ y=t \\ x = y - z = t-t=0 \end{cases}$$

← עבור ע"ע $\lambda_1=2$ הוקטורים העצמיים הם מהצורה $\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix}$

והם יוצרים <u>מרחב עצמי</u> של ע"ע $\lambda_1=2$ שהוא $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix}\right\}$

בסיס למרחב זה הוא $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

(2) <u>עבור ע"ע $\lambda_2=-2$</u>:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3+2 & 1 & -1 & 0 \\ -5 & 3+2 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & -4+2 & 0 \end{array}\right)$$

① $R_2-R_3$ ② $R_2+R_1$ ③ $\frac{1}{2}R_3$ ④ $R_3-3R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$z=0$
$y=t$
$x=t$

ולכן $\begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ הוקטורים העצמיים.

מרחב עצמי $\left\{\begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ ובסיס אליו: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

(3) <u>עבור ע"ע $\lambda_3=-4$</u>:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3+4 & 1 & -1 & 0 \\ -5 & 3+4 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & -4+4 & 0 \end{array}\right)$$

① $R_2-R_3-R_1$ ② $\frac{1}{6}R_3$ ③ $R_3+R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$z=t$
$y=\frac{t}{2}$
$x=t-\frac{t}{2}=\frac{t}{2}$

← $\begin{pmatrix} \frac{t}{2} \\ \frac{t}{2} \\ t \end{pmatrix}$ והבסיס למרחב $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ [או $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ וכו']

משפט: תהי $A \in F^{n\times n}$
ויהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ע"ע שונים של $A$
ו $v_1, \dots, v_m$ ו"ע שמתאימים לע"ע $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ בהתאמה.
אזי $\{v_1, \dots, v_m\}$ בת"ל.

כלו' וקטורים עצמיים
של ע"ע שונים הם בת"ל.

דוגמה:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda I| = \dots = -(\lambda-1)^2(\lambda-4)$$

$\lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_2 = 4$

נמצא ו"ע: עבור $\lambda_1 = 1$:

$$(A-\lambda I)v = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1-1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2-1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3-1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3-2R_2]{R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} z=t \\ y=-t \\ x=s \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} s \\ -t \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן בסיס למרחב העצמי של $\lambda_1 = 1$ הוא $\left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \right\}$

הערה: אם $v_1, v_2$ ו"ע של אותו ע"ע $\lambda$, אז גם כל צ"ל שלהם
יהיה ו"ע של $\lambda$ כי: נראה:

$$A(\alpha v_1 + \beta v_2) = \lambda(\alpha v_1 + \beta v_2)$$

$$A(\alpha v_1 + \beta v_2) = A\alpha v_1 + A\beta v_2 = \alpha A v_1 + \beta A v_2 = \alpha\lambda v_1 + \beta\lambda v_2$$
$$= \lambda\alpha v_1 + \lambda\beta v_2 = \lambda(\alpha v_1 + \beta v_2)$$

עבור $\lambda_2 = 4$: נקבל ... $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ בסיס למרחב העצמי.

ראינו שלפעמים יש וקטור אחד בבסיס ולפעמים 2,
רואים שאולי יש קשר לחזקה בפולי' של הדטר' $|A-\lambda I|$
נרצה לברר את הקשר...

**הגדרות:**

$|A-\lambda I|$ = "**הפולינום האופייני**" של $A$ ויסומן $P_A(\lambda)$

לכל ע"ע $\lambda_i$ של $A$ "**הריבוי האלגברי**" שלו הוא החזקה של הגורם $(\lambda-\lambda_i)$ בפולינום האופייני.

לכל ע"ע $\lambda_i$ של $A$ "**הריבוי (ריבוע) הגיאומטרי**" שלו הוא המימד של המרחב העצמי שלו

**דוגמה:** בדוגמה האחרונה $P_A(\lambda)=-(\lambda-1)^2(\lambda-4)$

עבור ע"ע $\lambda_1=1$: הריבוי האלגברי $=2$
הריבוי הגיאומטרי $=2$

עבור ע"ע $\lambda_2=4$: הריבוי האלגברי $=1$
הריבוי הגיאומטרי $=1$

**הערה:** לא תמיד הריבוי האלג' = הריבוי הגיאו' אבל בכל זאת יש קשר

**משפט:** לכל ע"ע: $1 \le$ הריבוי הגיאומטרי $\le$ הריבוי האלגברי.

Generated by CamScanner

# לינארית 2 - תרגול ט

(להזכיר ריבוי אלג׳, ריבוי גאו׳, משפט בסוף תרגול קודם)

## דמיון מטריצות

**הגדרה:** יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$.
נאמר ש- $B,A$ "דומות" אם קיימת $P\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה כך ש-

$$B=P^{-1}AP$$

(*) דמיון הוא יחס שקילות (לוודא שהם זוכרים)!

**תכונות המטריצות הדומות:**

1. $A,B$ דומות אז $|A|=|B|$
2. למטריצות דומות אותם ע״ע
3. למטריצות דומות אותו פ״א
4. למטריצות דומות אותה דרגה (rank)

נוכיח לדוג׳ את 1:

$$|B|=|P^{-1}AP|\underset{\text{כפליות הדטרמיננטה}}{=}|P^{-1}|\cdot|A|\cdot|P|\underset{P\text{ הפיכה}}{=}\frac{1}{\cancel{|P|}}\cdot|A|\cdot\cancel{|P|}=|A|$$

נוכיח את 3:

$$|B-\lambda I|=|P^{-1}AP-\lambda I|=|P^{-1}AP-P^{-1}\lambda P|=|P^{-1}(A-\lambda I)P|$$
$$=|P^{-1}|\cdot|A-\lambda I|\cdot|P|=\frac{1}{\cancel{|P|}}\cdot|A-\lambda I|\cdot\cancel{|P|}=|A-\lambda I|$$

**הגדרה:** העת״ל $T:V\to V$ "ניתנת ללכסון" (לכסינה) אם קיים בסיס $B$ של $V$ שבו $[T]_B$ היא אלכסונית.

נסמן את ההעת״ל בבסיס הסטנ׳ $[T]_E$.

$[T]_E$ ניתנת ללכסון אם קיים $B$ כך ש-

$$\underbrace{[T]_B}_{D}=\underbrace{[I]_B^E}_{P^{-1}}\underbrace{[T]_E}_{A}\underbrace{[I]_E^B}_{P}$$

diagonal → $D$ אלכסונית

כלו׳ אם היא דומה למטריצה אלכסונית.

הד

השאלה היא מי היא ה- $P$ הנ"ל? והתשובה:

$P=\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ כאשר $v_i$ ו"ע בת"ל של $T$.

**דוג:** שיעור שעבר ראינו שעבור המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

הע"ע הם: $\lambda_1=1$ עם ו"ע $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\lambda_2=4$ עם ו"ע $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

ולכן אז נציב $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ונקבל ש-

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

ולכן $|A|=$ מכפלת הע"ע.

**חשוב:** המטריצה האלכסונית המתקבלת היא עם הע"ע על האלכסון.
(ע"ע $\lambda_i$ בעמודה שבה שמנו ו"ע שהיה שייך ל-$\lambda_i$).

**שימוש:** אם רוצים לחשב חזקה של מטריצה אז אם יודעים שהיא דומה לאלכסונית (ומי האלכסונית) אז זה קל:

$$P^{-1}AP=D$$
$$\Rightarrow A=PDP^{-1}$$

ולכן
$$A^k=(PDP^{-1})^k=(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})$$
$$=PD^kP^{-1}$$

**משפט:** התכונות הבאות שקולות עבור $T:V\to V$

א. $T$ לכסינה.

ב. יש בסיס $B$ עבור $V$ שכל איבריו הם ו"ע של $T$.

נשים לב שמסקנה מהמשפט היא:

<u>משפט</u>: תהי $A$ ($n\times n$) מטריצה שיש לה $n$ ע"ע שונים אז היא לכסינה.

<u>הסבר</u>: אם יש לה $n$ ע"ע שונים אז לכל ע"ע הריבוי האלגברי $=1$
(כי דרגת הפולי' האופייני $= n$)
ואז לכל ע"ע הריבוי הגיאומטרי $= 1$ (כי $1 \le$ ר"ג $\le$ ר"א)
ולכן נקבל $n$ ו"ע שמתאימים לע"ע שונים ולכן בת"ל
$\Leftarrow$ הם בסיס ל- $B$

<u>דוג'</u>: $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}$ מצא האם $A$ ניתנת ללכסון ואם כן מהי האלכסונית הדומה לה?

<u>פתרון</u>:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix}2-\lambda & 3\\ 1 & 4-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda)-3 =$$

$$= 8-2\lambda-4\lambda+\lambda^2-3 = \lambda^2-6\lambda+5 = (\lambda-1)(\lambda-5) = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$

<u>עבור $\lambda_2=5$</u>

$$\left(\begin{array}{cc|c}2-5 & 3 & 0\\ 1 & 4-5 & 0\end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c}-3 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c}-3 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$y=t$
$x=t$

$\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

<u>עבור $\lambda_1=1$</u>

$$\left(\begin{array}{cc|c}2-1 & 3 & 0\\ 1 & 4-1 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{R_2-R_1} \left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$y=t \Rightarrow x=-3t$

$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$

ולכן

$$P=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

ולכן נקבל

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

לא כל A לכסינה, איך נדע מתי כן?
אז יש לנו את התנאי השקול מהמשפט האחרון (בעמ' ⑥) ונביא עכשיו קריטריון אחר:

**משפט הלכסון:** תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ אזי:

A לכסינה $\iff$ הפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$
**וגם** לכל ע"ע של A הריבוי האלג' = הר"ג (ריבוי גאומטרי)

**לדוג':** ① $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ האם A לכסינה מעל $\mathbb{R}$? מעל $\mathbb{C}$?

**פתרון:** $P_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda&1\\-1&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1$

**מעל** $\mathbb{R}$: הפ"א לא מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{R}$ ולכן A לא לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

**מעל** $\mathbb{C}$: $\lambda^2+1=(\lambda+i)(\lambda-i)$

כא הפ"א מתפרק לגורמים לינאריים
וכיוון שלכל ע"ע הר"א = 1 אז גם הר"ג = 1
עפ"י משפט הלכסון
A לכסינה.

② ראינו שעבור $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&2&3\end{pmatrix}$ הפ"א הוא:

$P_A(\lambda)=-(\lambda-1)^2(\lambda-4)$

כא מתפרק לגורמים לינאריים!

וראינו:

| $\lambda=4$ | $\lambda=1$ |
|---|---|
| ר"א = ר"ג = 1 | ר"א = ר"ג = 2 |

$\Leftarrow$ עפ"י משפט הלכסון A לכסינה.

③ $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$P_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\0&-\lambda&1\\0&0&-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3$

אכן מתפרק לגורמים לינאריים

$\Leftarrow \lambda=0$

נמצא ו"ע:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} z=0 \\ y=0 \\ x=t \end{array} \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

⇐ הריבוי האלגברי $=3$
הריבוי הגאומטרי $=1$
$\neq$ ולכן $A$ לא לכסינה.

הערה:
[המשפט היסודי של האלגברה: לכל פולינום יש פתרון מעל $\mathbb{C}$.]
ולכן כל פולינום מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{C}$.
⇐ ולכן: מעל $\mathbb{C}$ כדי ש-$A$ תהיה לכסינה מספיק לדרוש שלכל ע"ע הר"א = הר"ג.

תרגיל: הוכח: $A$ הפיכה $\iff$ לכל הע"ע, $\lambda$, של $A$ מתקיים $\lambda \neq 0$

הוכחה: $\Leftarrow$ נתון $A$ הפיכה.
נניח בשלילה שקיים ע"ע $\lambda=0$. אזי $|A-0\cdot I|=0$
$|A|=0$
$A$ לא הפיכה, סתירה!

$\Rightarrow$ נניח שלכל ע"ע של $A$ מתקיים שהוא $\neq 0$.
ונניח בשלילה ש-$A$ אינה הפיכה. אזי $|A|=0$
$$|A|=|A-0\cdot I|$$
ז"א $|A-0\cdot I|=0$ ולכן $0$ הוא ע"ע של $A$. סתירה!

משל

* האם יש קשר בין הפיכות ולכסינות? ← כלו' האם אחד גורר את השני?
לא, נראה דוג':
1. מטריצת האפס לא הפיכה וכמובן שכן לכסינה שהרי
$$(I)^{-1}\cdot 0\cdot I = 0$$
אלכסונית
(כל מטריצה מהצורה $\begin{pmatrix}0&0\\0&x\end{pmatrix}$ היא לא הפיכה וכן לכסינה)
2. מטריצת היחידה הפיכה ולכסינה.
3. נראה מטריצה שכן הפיכה ולא לכסינה