ב"ש בדידה תשעז מועד א

1. תהיינה שתי פונקציות $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. נגיד ש f מתאימה ל g אם

$$\forall x_1 \in \mathbb{R} \exists x_2 \in \mathbb{R} : (x_1 \neq x_2) \wedge (f(x_1) = g(x_2))$$

פתרון: פונקציה f מתאימה לפונקציה g אם לכל x_1 קיים x_2 ששונה מ x_1 עבורו מתקיים $f(x_1) = g(x_2)$. השלילה הלוגית היא

$$\exists x_1 \in \mathbb{R} \forall x_2 \in \mathbb{R} : (x_1 = x_2) \vee (f(x_1) \neq g(x_2))$$

כלומר שקיים x_1 כך שלכל x_2 ששונה ממנו מתקיים $f(x_1) \neq g(x_2)$.

(א) האם $f(x) = x^2$ מתאימה ל $g(x) = x$?
פתרון: לא. למשל עבור $x_1 = 1$ מתקיים כי

$$f(1) = 1^2 = 1$$

ונראה ש

$$\forall x_2 \in \mathbb{R} : (x_1 = x_2) \vee (f(x_1) \neq g(x_2))$$

(המשך שלילת הפסוק שמגדיר פונקציה מתאימה). אכן, יהא x_2 ממשי. אם $x_1 = 1 = x_2$ סיימנו. אחרת $x_2 \neq 1$ ואז

$$g(x_2) = x_2 \neq 1 = f(x_1)$$

כמו שרצינו להוכיח.

(ב) האם $f(x) = x^2$ מתאימה ל $g(x) = x^2$?
פתרון: לא. למשל עבור $x_1 = 0$ מתקיים כי

$$f(0) = 0^2 = 0$$

ונראה ש

$$\forall x_2 \in \mathbb{R} : (x_1 = x_2) \vee (f(x_1) \neq g(x_2))$$

(המשך שלילת הפסוק שמגדיר פונקציה מתאימה). אכן, יהא x_2 ממשי. אם $x_1 = 0 = x_2$ סיימנו. אחרת $x_2 \neq 0$ ואז

$$g(x_2) = (x_2)^2 \neq 0 = f(x_1)$$

כמו שרצינו להוכיח.

(ג) תהא f פונקציה. האם $g(x) = f(x+1)$ מתאימה ל $h(x) = f(x)$?
פתרון: כן, יהא x_1 ממשי. צריך למצוא x_2 כך ש $(x_1 \neq x_2) \wedge (g(x_1) = h(x_2))$. נגדיר $x_2 = x_1 + 1$ שהוא שונה מ x_1 ומתקיים כי

$$g(x_1) = f(x_1 + 1) = h(x_1 + 1) = h(x_2)$$

כמו שרצינו.

2. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

(א) לכל שתי קבוצות A,B מתקיים $A\backslash B=A\backslash\left(A\cap B\right)$.

פתרון: הוכחה: נגדיר $U=A\cup B$ ונתייחס למשלים ביחס ל U:

$$A\backslash\left(A\cap B\right)\underbrace{=}_{\text{זהות}}A\cap\left(A\cap B\right)^{c}\underbrace{=}_{\text{דה מורגן}}A\cap\left(A^{c}\cup B^{c}\right)\underbrace{=}_{\text{פילוג}}\left(A\cap A^{c}\right)\cup\left(A\cap B^{c}\right)=\emptyset\cup\left(A\cap B^{c}\right)=A\cap B^{c}=A\backslash B$$

(ב) לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים $A\backslash B\subseteq A\backslash\left(B\backslash C\right)$.

פתרון: הוכחה: יהא $x\in A\backslash B$ ונראה כי $x\in A\backslash\left(B\backslash C\right)$ כלומר $x\in A$ וגם $x\notin B\backslash C$. מכך ש $x\in A\backslash B$ נסיק ש $x\in A$ וגם $x\notin B$. מכיוון ש $x\notin B$ אזי בפרט $x\notin B\backslash C$. לכן קיבלנוש $x\in A$ וגם $x\notin B\backslash C$ כפי שרצינו.

(ג) לכל שלוש קבוצות A,B,C אם $A\subseteq C$ אז $A\cap B=A\cap\left(B\backslash C\right)$.

פתרון: הפרכה: $A=B=C=\{1\}$ ואז $A\subseteq C$. מצד שני

$$A\cap B=A\neq\emptyset=A\cap\emptyset=A\cap\left(B\backslash C\right)$$

3. יהא $q\in\mathbb{R}$. תהא סדרה המוגדרת ע"י $a_{1}=1$ ונוסחת הנסיגה $a_{n+1}=a_{n}+\left(-1\right)^{n}q^{n}$.
הוכיחו באינדוקציה (רגילה או מלאה) כי $\left(1+q\right)a_{n}=1-\left(-1\right)^{n}q^{n}$.

פתרון: הוכחה:

- בסיס $n=1$: אכן, $\left(1+q\right)a_{1}=\left(1+q\right)\cdot1=1-\left(-q\right)=1-\left(-1\right)^{1}q^{1}$.
- צעד: נניח נכונות עבור n, כלומר, $\left(1+q\right)a_{n}=1-\left(-1\right)^{n}q^{n}$. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר, $\left(1+q\right)a_{n+1}=1-\left(-1\right)^{n+1}q^{n+1}$. מתקיים

$$\left(1+q\right)a_{n+1}\underbrace{=}_{\text{הגדרת הסדרה}}\left(1+q\right)\left(a_{n}+\left(-1\right)^{n}q^{n}\right)=\left(1+q\right)a_{n}+\left(1+q\right)\left(-1\right)^{n}q^{n}\underbrace{=}_{\text{הנחת האינדוקציה}}1-\left(-1\right)^{n}q^{n}+\left(1+q\right)\left(-1\right)^{n}q^{n}=$$

$$=1-\left(-1\right)^{n}q^{n}\left[1-\left(1+q\right)\right]=1-\left(-1\right)^{n}q^{n}\left[-q\right]=1-\left(-1\right)^{n+1}q^{n+1}$$

כמו שרצינו.

4. תהיינה $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם $f\circ g$ חח"ע אז גם $g\circ f$ חח"ע.

פתרון: הפרכה: נגדיר $g(n)=n+1$ ו

$$f(n)=\begin{cases}n-1 & n\geq2\\1 & n=1\end{cases}$$

אזי

$$\left(f\circ g\right)\left(n\right)=f\left(g(n)\right)=f\left(n+1\right)=n$$

ולכן $f\circ g=Id$ הפיכה ובפרט חח"ע אבל

$$\left(g\circ f\right)\left(n\right)=\begin{cases}g(n-1)=n & n\geq2\\g(1)=2 & n=1\end{cases}$$

ולכן $(g\circ f)(1)=2=(g\circ f)(2)$ כלומר $g\circ f$ אינה חח"ע.

פתרון: הוכחה:

($\Rightarrow$)בהנחה ש g הפיכה נרצה להראות ש f הפיכה. מההנחה נקבל ש $g\circ g$ הפיכה כהרכבה של הפיכות. כיוון ש $f\circ f=g\circ g$ נקבל ש $f\circ f$ הפיכה ולכן בפרט היא חח"ע ועל ולכן f ("הימנית) חח"ע ו f ("השמאלית") על. קיבלנו ש f חח"ע + על ולכן f הפיכה.

($\Leftarrow$) אותה הוכחה כמו הכיוון הקודם, אם נחליף את האותיות f ב g.

(ב) אם $f\circ g=g$ וגם g חח"ע ועל אז f חח"ע.

פתרון: הוכחה: אם g חח"ע ועל אז היא הפיכה וקיימת g^{-1}. אם בנוסף $f\circ g=g$ נוכל להרכיב מימין g^{-1} לקבל

$$f=(f\circ g)\circ g^{-1}=g\circ g^{-1}=Id$$

ולכן $f=Id$ ובפרט חח"ע .

(ג) אם f הפיכה ו g הפיכה אזי גם $f+g$ הפיכה.

פתרון: הפרכה: נגדיר $f=g=Id$ הפיכות אבל

$$(f+g)(n)=f(n)+g(n)=n+n=2n$$

כלומר הפונקציה ששולחת את n ל $2n$ ולכן היא לא על (כי מתקבלים רק מספרים זוגיים ולכן ל 1 אין מקור) ולכן היא לא הפיכה.

5. בכמה סדרות באורך 10 המורכבות מהאותיות א', ב' וג':

(א) אין שתי אותיות זהות צמודות.

פתרון: לאות הראשונה יש 3 אפשרויות, לאות השניה יש 2 אפשרויות (לא יכול להיות האות הראשונה), לאות השלישית יש 2 אפשרויות (לא יכול להיות האות השניה) וכו' לכן התשובה היא

$$3\cdot 2^9$$

(ב) האות א' מופיע בדיוק פעמיים.

פתרון: מספר הסדרות באורך 8 המורכבת מאותיות ב' וג' הוא 2^8. ולכן התשובה לשאלה היא

$$\underbrace{\binom{10}{2}}_{\text{מיקומים אפשרים לאות א'}}\cdot\underbrace{2^8}_{\text{סדרה באורך 8 עם שאר האותיות}}$$

(ג) כל אות מבין השלוש מופיע לפחות פעם אחת.

פתרון: נגדיר A_1 להיות כל הסדרות באורך 10 המורכבות מהאותיות א', ב' וג' בהם א' לא מופיע, A_2 את הסדרות בהן ב' לא מופיע וב A_3 את אלו שג' לא מופיע. נרצה לחשב את $|(A_1\cup A_2\cup A_3)^c|$. נסמן ב U את כל הסדרות באורך 10 ללא אילוצים נוספים ונקבל, לפי הכלה-הדחה:

$$\begin{aligned}|(A_1\cup A_2\cup A_3)^c|&=|U|-|A_1\cup A_1\cup A_3|\\&=|U|-\left[\sum_{i=1}^{3}|A_i|-\sum_{1\le i<j\le 3}|A_i\cap A_j|+|A_1\cap A_1\cap A_3|\right]\end{aligned}$$

פשוט ש $|U|=3^{10}$. בנוסף, $|A_1|=|A_2|=|A_3|=2^{10}$ כי אלו הסדרות באורך 10 עם שתי אותיות. כעת, לכל שתי

קבוצות שונות A_i, A_j הגדול $1 = 1^{10} = |A_i \cap A_j|$ כי זה סדרות באורך 10 עם אות אחת. וכמובן ש $0 = |A_1 \cap A_1 \cap A_3|$ כי אי אפשר לבנות סדרה באורך 10 עם 0 אותיות. לכן, התשובה הסופית היא

$$3^{10} - \left[3 \cdot 2^{10} - \binom{3}{2} \cdot 1\right] = 3^{10} - 3 \cdot 2^{10} + 3$$