משפט (תנאי מספיק לחילופיות הגזירות)

נניח שf ממחלקה C^{-1} בסביבה D של x^0 ב$\mathbb{R}^k$ ו$f_{x_ix_j} = \frac{d^2 f}{dx_j dx_i}$ קיימת בסביבה D ורציפה בנק. x_0, אזי $f_{x_jx_i}\left(x^0\right)$ קיימת ומתלכדת עם $f_{x_ix_j}\left(x^0\right)$
(על כן, אם f ממח' C^2 בD, אזי הנגזרות המעורבות מסדר שני מתלכדות בD).

הוכחה

כיוון שרק המשתנים x_i וx_j מעורבים במשפט, הרי זהו משפט על פונקציה של 2 משתנים בלבד. נסמנם לשם נוחיות בx וy.

הסביבה D של $\underline{x}^0 = \left(x^0, y^0\right)$ מכילה קבוע שמרכזו $\underline{x}^0$ ובה"כ נניח שD עצמה היא הריבוע $D = \left\{(x,y) \middle| \begin{matrix} \left|x-x^0\right| < a \\ \left|y-y^0\right| < b \end{matrix} \right\}$. אם $|t| < a$ (t ממשי) אזי $\left(x, y^0+t\right) \in D$ ולכן $\left|x-x^0\right| < a$ ו$f\left(x, y^0+t\right)$ מוגדרת עבור x וt כנ"ל.

1. $g(x) \doteqdot \frac{1}{t}\left[f\left(x, y^0+t\right) - f\left(x, y^0\right)\right]$ עבור $0 < |t| < a$

2. $g'(t) = \frac{1}{t}\left[f_x\left(x, g^0+t\right) - f\left(x, y^0\right)\right]$

נסתכל על שינוי g_t בין 2 נק. x^0 וx^0+s

<u>עבור $|s| < a$</u> - כיוון ש$g_t(0)$ קיימת בקטע $s \leq \left|x-x^0\right|$, מתקיים משפט הערך הממוצע (משפט לגרנז') $g\left(x^0+s\right) - g_t\left(x^0\right) = sg_t'\left(x^0+\theta s\right)$ עם $0 < \theta < 1$

<u>עבור $0 < |s| < a$</u>:

1. $(*)\, \frac{1}{s}\left[g_t\left(x_0+s\right) - g_t\left(x_0\right)\right] = g_t'\left(x^0+\theta s\right) \overset{2}{=} \frac{1}{t}\left[f_x\left(x^2+\theta s, y^0+h\right) - f_x\left(x^0+\theta s, y^0\right)\right]$

2. f_x גזירה לפי y בקטע $\left[y^0, y+t\right]$ (או $\left[y^0+t, y\right]$). לכן, לפי משפט הערך הממוצע בקטע הנ"ל הביטוי $(*)$ שווה עם $0 < \theta' < 1$

$$(*) = \frac{1}{t} \cdot t \cdot f_{xy}\left(x^0+\theta s, y^0+\theta t\right)$$

$$\exists \lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{1}{s}\left[g_t\left(x^0+s\right) - g_t\left(x_0\right)\right] = \lim_{(s,t)\to(0,0)} f_{xy}\left(x^0+As, y^0+\theta' t\right) = f_{xy}\left(x^0, y^0\right)$$

לכן, בגלל הרציפות של f_{xy} בנק. $\left(x^0, y^0\right)$:

$$\frac{1}{s}\left[g_t\left(x^0+s\right) - g_t\left(x^0\right)\right] \overset{1}{=} \frac{1}{s}\left[\frac{1}{t}\left(f\left(x^0+s, y^0+t\right) - f\left(x^0+t, y^0\right)\right) - \frac{1}{t}\left(f\left(x^0, x^0+t\right) - f\left(x^0, y^0\right)\right)\right]$$

לכל s כנ"ל נתון.

$$\exists \lim_{t\to 0}(\cdots) = \frac{1}{s}\left[f_y\left(x^0+s,y^0\right) - f\left(x^0,y^0\right)\right] (**)$$

משפטון לשימו כאן: נניח $\lim_{(s,t)\to(0,0)} h(s,t) = A$ $\exists$ ולכל s נתון בסביבת 0, $\exists \lim_{t\to 0} h(s,t) =$ $g(s)$ אזי $\exists \lim_{s\to 0} g(s) = A$ (ז"א $\lim_{(s,t)\to(0,0)} h(s,t) = \lim_{s\to 0}\left(\lim_{t\to 0} h(s,t)\right)$).

אצלנו: אם $h(s,t) = \frac{1}{s}\left[g_t\left(x^0+s\right) - g\left(x^0\right)\right]$, מתקיימים 2 הניסוחים של המשפטון:

$$\exists \lim_{(s,t)\to(0,0)} h(s,t) = f_{xy}\left(x^0,y^0\right) = ("A")$$

$(**) = \exists \lim_{t\to 0} h(s,t)$ לכל s נתון כנ"ל. דהיינו

$$\exists\ f_{yx}|_{(x^0,y^0)} = (f_y)_x\left(x^0,y^0\right) = f_{xy}\left(x^0,y^0\right)$$

$\blacksquare$

באופן אינדוקטיבי, מקבלים שאם f ממח' C^n בסביבה n אזי בכל נגזרותיה המעור-בות, עד סדרה הגזירה ניתן לשינוי באופן רצוני

$$\nabla f = ()\, f = \left(\frac{df}{dx_1}, \ldots \frac{df}{xd_k}\right) \Leftarrow \nabla = \left(\frac{d}{dx_1}, \ldots \frac{d}{dx_k}\right) (*)$$

וכל $h \in \mathbb{R}^k$(קבוע), $h\cdot\nabla = \sum_{i=1}^{k} h_i \cdot \frac{d}{dx_i}$, $(h\cdot\nabla) f = \sum_{i=1}^{k} \frac{df}{dx_i}$

$$(h\cdot\nabla)^n = \sum\prod\left(h_{i_1}\cdot\frac{d}{dx_{i_1}}\right)\ldots\left(h_{i_1}\cdot\frac{d}{dx_{i_n}}\right) = (*) = \sum \frac{1!}{i_1!\ldots i_n!}\cdot h_{i_1}\ldots h_{i_n}\frac{d^n}{dx_{i_1}\ldots dx_{i_n}}$$

נוסחת טיילור בk משתנים

משפט

נניח שf מחלקה בC^{n+1}($n \geq 0$) בקבוצה פתוחה D ב$\mathbb{R}^k$. נניח שD מכילה את הקטע $\overline{x^0 \quad x^0+h} = \left\{x^0+th \middle| 0 \leq t \leq 1\right\}$ - קטע שמכיל את הקצוות - אזי קיים $-1 <$ $\theta < 1$ כך ש

$$f\left(x^0+h\right) = \sum_{j=0}^{n}\frac{(h\cdot\nabla)^j}{j!}\cdot f\left(x^c\right) + \underbrace{\frac{(h\cdot\nabla)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot f\left(x^0+\theta h\right)}_{\text{שארית טיילור בצורת לגרנז'}}$$

הערה

המקרה הפרטי עבור $n=0$ נקרא משפט הערך בk משתנים:
נניח שf ממח' C^1 בקב' פתוחה D ב$\mathbb{R}^k$ ונניח שהקטע $\left(x^0+h\right)\left(x^0\right)$ מוכל בD.
אזי קיים $0<\theta<1$ כך ש:

$$\boxed{f\left(x^0+h\right)=f\left(x^0\right)+(h\cdot\nabla)\cdot f\left(x^0+\theta h\right)}$$

הוכחה משפט טיילור

נתבונן ב$\mathbb{R} \xrightarrow{f} D \xrightarrow{x(0)} [0,1] : x\left(t\right)=x^0+th$.

$$F\left(t\right)\doteqdot\left(f\circ x\right)\left(t\right)=f\left(x\left(t\right)\right)\quad[0,1]\rightarrow\mathbb{R}$$

פונ' ממשית של המשתנה היחיד t בקטע הסגור $[0,1]$ והיא גזירה לפי t(משפט כלל השרשרת) כי f ממח' C^1 ולכן דיפרנציאבילית בD ו$x\left(0\right)$ גזירה בנק' $[0,1]$

$$F'\left(t\right)=df|_{x(t)}\,x'\left(t\right)=x'\left(t\right)\cdot\nabla f|_{x(t)}=h\cdot\nabla f|_{x(t)}$$

נכתוב בצורה פורמלית

$$\left.\left(\frac{d}{dt}\right)F\right|_t=\left.(h\cdot\nabla)\,f\right|_{x(t)}$$

$$\vdots$$

$$\left.\left(\frac{d}{dt}\right)^j F\right|_t=\left.(h\cdot\nabla)^j\,f\right|_{x(t)}$$

$$\forall 0<j<n+1$$

עבור f ממ"ח C^n
f גזירה עד סדר $n+1$ בקטע $[0,1]$ של t(ונגזרות אולי רציפות). נוסחת טיילור נכונה לכן עבור F: כלומר

$$F\left(0\right)=\sum_{j=0}^{n}\frac{F^{(j)}\left(0\right)}{j!}\cdot1^s+\frac{1}{(n+1)!}\cdot F^{(n+1)}\theta$$

עבור θ מתאים. נציב את הגדרת F (בנוסחת טיילור) ונקבל...