תרגול 10 - עוצמות

10 באוגוסט 2020

נרבה לעסוק היום בהוכחות בעמצעות ק.ש.ב.: אם A, B קבוצות, ונתון שישנה $f : A \to B$ חח"ע, וישנה $g : B \to A$ חח"ע, אז ישנה $h : A \to B$ חח"ע ועל. במילים אחרות: אם $|A| \le |B| \wedge |B| \le |A|$ אז $|A| = |B|$.

תרגילים:

1. חשבו את עוצמת $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$
__פתרון__: מצד אחד $A \subseteq \mathbb{Q}$ ולכן $|A| \le \aleph_0$. מצד שני, נגדיר $B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$, קל לראות ש- $|A| \ge |B| = \aleph_0$.

2. נסמן $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

(א) חשבו את עוצמת $X = \{f \in \mathbb{N}^A : f \text{ is 1-1}\}$.
__פתרון__: ראשית, נראה $|X| \le \aleph_0$ ע"י פונקציה חח"ע $\varphi : X \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $\varphi(f) = (f(1), f(2), f(3), f(4))$. היא חח"ע כיון שאם $f \ne g$ אז קיים $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ כך ש- $f(i) \ne g(i)$ ולכן $(f(1), f(2), f(3), f(4)) \ne (g(1), g(2), g(3), g(4))$, כי אחד הרכיבים שונים.
נראה כעת $|X| \ge \aleph_0$: ע"י פונקציה חח"ע $F : \mathbb{N} \to X$ המוגדרת ע"י $F(n) = \{(1, n), (2, n + 1), (3, n + 2), (4, n + 3)\} \in X$. F חח"ע, כי אם $n \ne m$ אז בפרט $\underbrace{F(m)}_{\text{function}}(1) = m \ne n = \underbrace{F(n)}_{\text{function}}(1)$, ולכן $F(n) \ne F(m)$.
בסה"כ לפי ק.ש.ב. נקבל $|X| = \aleph_0$.

(ב) חשבו את עוצמת $Y = \{f \in \mathbb{N}^A : f \text{ is not 1-1}\}$.
__פתרון__: ראשית, נראה $|Y| \le \aleph_0$ ע"י פונקציה חח"ע $\varphi : Y \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $\varphi(f) = (f(1), f(2), f(3), f(4))$. היא חח"ע כיון שאם $f \ne g$ אז קיים $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ כך ש- $f(i) \ne g(i)$ ולכן $(f(1), f(2), f(3), f(4)) \ne (g(1), g(2), g(3), g(4))$, כי אחד הרכיבים שונים.
נראה כעת $|Y| \ge \aleph_0$: נגדיר פונקציה $F : \mathbb{N} \to Y$ ע"י $F(n) = \{(1, n), (2, n), (3, n)(4, n)\}$, ושוב F חח"ע: כי אם $n \ne m$ אז בפרט $\underbrace{F(m)}_{\text{function}}(1) = m \ne n = \underbrace{F(n)}_{\text{function}}(1)$,

ולכן $F(n) \neq F(m)$.

בסה"כ לפי ק.ש.ב. נקבל $|Y| = \aleph_0$.

3. תהא A קבוצה. נגדיר O קבוצת כל יחסי השקילות על A ונגדיר P קבוצת כל החלוקות על A. הוכיחו כי $|O| = |P|$.

פתרון: נגדיר $f : O \to P$ ע"י $f(\sim) = {}^{A}/_{\sim}$. הפיכה ע"י ההופכית $f^{-1} : P \to O$ המוגדרת ע"י $f^{-1}(\{A_i : i \in I\}) = \{(x, y) : \exists i \in I, x \in A_i \wedge y \in A_i\}$. בשיעור על יחסי שקילות הראיתם שאכן $f \circ f^{-1} = I_P, f^{-1} \circ f = I_O$.

4. נסמן ב־ S את קבוצת יחסי השקילות על הטבעיים: $S = \{R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} : R \text{ is an equivalence relation}\}$.

(א) הראו ש־ $|S| \leq |P(\mathbb{N})|$.

פתרון: נשים לב שלפי הגדרה נקבל $S \subseteq P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ ולכן $|S| \leq |P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})| = \aleph = 2^{\aleph_0} = |P(\mathbb{N})|$.

(ב) נסמן $A = \mathbb{N} \setminus \{1\}$, ונסמן ב־$T$ את אוסף החלוקות של הטבעיים: $T = \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ is a partition of } \mathbb{N}\}$. נגדיר $f : P(A) \to T$ ע"י: $f(X) = \{X \cup \{1\}, \mathbb{N} \setminus (X \cup \{1\})\}$. הוכיחו שהיא חח"ע.

פתרון: נניח $f(X) = f(Y)$, נקבל $\{X \cup \{1\}, \mathbb{N} \setminus (X \cup \{1\})\} = \{Y \cup \{1\}, \mathbb{N} \setminus (Y \cup \{1\})\}$. בפרט, $X \cup \{1\} = Y \cup \{1\} \vee X \cup \{1\} = \mathbb{N} \setminus (Y \cup \{1\})$. כיון ש־ $1 \in X \cup \{1\} \wedge 1 \notin \mathbb{N} \setminus (Y \cup \{1\})$, כלומר $X \cup \{1\} \neq \mathbb{N} \setminus (Y \cup \{1\})$ ולכן (מהשקילות $a \vee b \equiv \neg b \to a$) $X \cup \{1\} = Y \cup \{1\}$, כיון ש־ $1 \notin X, Y$ נקבל $X = Y$.

(ג) הוכיחו: $|S| = |P(\mathbb{N})|$.

פתרון: אחרי סעיף א, מספיק להראות $|S| \geq |P(\mathbb{N})|$, ואז לפי ק.ש.ב. נסיים. אכן, ראינו בסעיף הקודם $|T| \leq |P(A)|$. ראינו בשאלה 3 $|S| = |T|$. בנוסף, כיון ש־ $|A| = |\mathbb{N}|$ נקבל $|P(A)| = |P(\mathbb{N})|$ ובסה"כ:

$$|S| \underset{q.3}{=} |T| \underset{q.4b}{\geq} |P(A)| \underset{|A|=|\mathbb{N}|}{=} |P(\mathbb{N})|$$

5. נגדיר יחס $\sim$ על $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ע"י $g \sim f$ אמ"מ לכל x ממשי $f(x) - g(x)$ שלם.

(א) הוכיחו כי זהו יח"ש.

פתרון: רפל': תהי f אזי כמובן לכל x ממשי $f(x) - f(x) = 0 \in \mathbb{Z}$.

סימ: אם $f \sim g$ אז לכל x נקבל $f(x) - g(x) \in \mathbb{Z}$ ולכן גם $g(x) - f(x) \in \mathbb{Z}$.

טרנ': אם $f \sim g \wedge g \sim h$ אז $f(x) - g(x) = a \wedge g(x) - h(x) = b \Rightarrow f(x) - h(x) = a + b \in \mathbb{Z}$.

(ב) לכל $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ מצאו את העוצמה של מחלקת השקילות של f (כלומר $|[f]| = ?$)

פתרון: בוודאי שזו קבוצה אינסופית, כלומר $[f] \geq \aleph_0$ (כי כל הפונקציות של הזזה בקבוע שלם שייכות לשם), וכן כמובן $[f] \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ולכן $|[f]| \leq \aleph^{\aleph} = 2^{\aleph}$. נראה $|[f]| \geq 2^{\aleph}$. נגדיר פונקציה $F : \mathbb{Z}^{\mathbb{R}} \to [f]$ ע"י $F(g) = f - g$. היא מוגדרת היטב כי $\forall x : f(x) - (f - g)(x) = f(x) - f(x) + g(x) = g(x) \in \mathbb{Z}$. F חח"ע: נניח $g \neq g' \in \mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$ אז יש x כך ש־ $g(x) \neq g'(x)$ ולכן $(f - g)(x) = f(x) - g(x) \neq f(x) - g'(x) = (f - g')(x)$ ולכן $F(g) = f - g \neq f - g' = F(g')$.

(ג) מצאו את עוצמת קבוצת המנה.

6. תהא $A = \mathbb{N}$, חשבו את העוצמות הבאות, כלומר, קבעו האם הן סופיות, $\aleph_0, \aleph, 2^{\aleph}$: הכלל שעובדים לפיו: אם $2 \leq |A| \leq |B|$ אז $|A|^{|B|} = 2^{|B|}$.

(א) $\left|A^A\right| = |A|^{|A|} = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$

(ב) $\left|P(A)^A\right| = |P(A)|^{|A|} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$

(ג) $\left|P(A)^{P(A)}\right| = |P(A)|^{|P(A)|} = (2^{\aleph_0})^{2^{\aleph_0}} = \aleph^{\aleph} = 2^{\aleph}$

(ד) $\left|A \times P(A) \times P(A)^{P(A)}\right| = \aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph} = 2^{\aleph}$

7. מה עוצמת הקבוצה $X = \left\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f(1) \leq f(2)\right\}$

8. מה עוצמת הקבוצה $X = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x \notin \mathbb{Q} : f(x) = 1\right\}$

9. תהיינה A_1, A_2, B_1, B_2 קבוצות כך ש $A_1 \sim B_1, A_2 \sim B_2$. הוכיחו כי $A_2^{A_1} \sim B_2^{B_1}$.

פתרון: נתון שקיימת $f_1 : A_1 \to B_1, f_2 : A_2 \to B_2$ הפיכות. נגדיר $F : A_2^{A_1} \to B_2^{B_1}$ ע"י: $F(g) = f_2 \circ g \circ f_1^{-1}$. נראה שהיא הפיכה ע"י ההופכית $F^{-1} : B_2^{B_1} \to A_2^{A_1}$ המוגדרת $F^{-1}(h) = f_2^{-1} \circ h \circ f_1$, וההרכבה כמובן הזהות:

$$F \circ F^{-1}(h) = F(f_2^{-1} \circ h \circ f_1) = f_2 \circ f_2^{-1} \circ h \circ f_1 \circ f_1^{-1} = h$$

$$F^{-1} \circ F(g) = F^{-1}(f_2 \circ g \circ f_1^{-1}) = f_2^{-1} \circ f_2 \circ g \circ f_1^{-1} \circ f_1 = g$$

10. מה עוצמת הקבוצות הבאות:

(א) F קבוצת כל תתי הקבוצות הסופיות של $\mathbb{N}$

(ב) B קבוצת כל תתי הקבוצות האינסופיות של $\mathbb{N}$

(ג) C קבוצת כל תתי הקבוצות של $\mathbb{R}$ שעוצמתם שווה $\aleph_0$

(ד) D קבוצת כל תתי הקבוצות של $\mathbb{R}$ שעוצמתם שווה $\aleph$