## תרגיל 5- מתמטיקה בדידה תש"פ (פתרון)

**שאלה 1.** נגדיר $A_n := \{2n, 3n, (-1)^n\}$. כעת נסמן:

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{2n} \quad , A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{3n}$$

חשבו, והוכיחו כי החישוב נכון, את: $A \cap B$

**פתרון.** ראשית, נחשב את $A_{2n}, A_{3n}$:

$$A_{3n} = \{6n, 9n, (-1)^n\} \; A_{2n} = \{4n, 6n, 1\}$$

נסמן $C := \{6n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$. כעת נראה כי $C = A \cap B$: נשתמש לשם כך בהכלה דו כיוונית:

(⊆) ברור (למה?)

(⊇) יהי $x \in A \cap B$ נראה כי $x \in C$. מכיוון ש $(x \in A_{2n}) \wedge (x \in A_{3m})$ עבור $m, n$ טבעיים (לא בהכרח שווים) כלשהם (חשבו ממה זה נובע) מתקיים:

$$(x = 6n \vee x = 4n \vee x = 1) \wedge (x = 6m \vee x = 9m \vee x = (-1)^m)$$

כעת אם $x = 6n$ או $x = 1$ סיימנו (למה?). לכן נניח כי $x = 4n$. לכן, $x \neq (-1)^m$ (חישבו מדוע) ואם $x = 6m$ גם כן סיימנו. לכן נוכל להניח כי $x = 9m$ אבל אז $4n = 9m$; $\leftarrow$ $9 \mid n$ ולכן $x = 6k$ עבור $k$ טבעי (מדוע?) וסיימנו.

**שאלה 2.** היזכרו כי בתרגיל הבית הקודם עבור קבוצות: $A_1, A_2 \cdots A_n$ (בקבוצה אוניברסלית $\mathfrak{U}$). הגדרנו את הקבוצה הבאה:

$$\mathbf{X} := \{X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n : \forall 0 \leq i \leq n \, (X_i = A_i) \vee (X_i = \mathfrak{U} \setminus A_i)\}$$

חשבו ,והוכיחו כי החישוב נכון, את: $\bigcup \mathbf{X}$

**פתרון:** ניתן הוכחה שונה להוכחה שניתנה בשעות הקבלה (ההוכחה הנ"ל לא משתמשת באינדוקציה והיא ישירה):

נראה בעזרת הכלה דו-כיוונית כי $\cup \mathbf{X} = \mathcal{U}$:

(⊆) יהי $x \in \bigcup \mathbf{X}$ נרצה להראות כי $x \in \mathcal{U}$. אבל מהגדרת איחוד נובע כי קיים $Y$ ב$\mathbf{X}$ כך ש $x \in Y$ ומהגדרת $\mathbf{X}$ נובע כי: קיים $i \leq n$ עבורו $x \in A_i$ או $x \in (A_i)^c$. בכל מקרה, קיבלנו כי $x \in \mathcal{U}$ לפי נתון או הגדרת משלים בהתאמה.

(⊇) יהי $x \in \mathcal{U}$ נשים לב כי לכל $i \leq n$ מהתכונה: $A_i \cup (A_i)^c = \mathcal{U}$ נובע כי לכל $i \leq n$: $x \in A_i \vee x \in (A_i)^c$.

נסמן את הקבוצה הבאות:

- $C_0 = \{i \leq n \colon x \in A_i\}$
- $C_1 = \{i \leq n \colon x \in (A_i)^c\}$

נשים לב כי $C_0, C_1$ זרות (למה?) ולכן נוכל להגדיר את האיבר הבא ב$\mathbf{X}$:

$$Y = \bigcap_{i \in C_0} A_i \cap \bigcap_{i \in C_1} (A_i)^c$$

(וודאו שאתם אכן רואים כי $Y$ הוא איבר ב$\mathbf{X}$). וכעת מהגדרת $C_0, C_1$ ברור כי $x \in Y$. ההוכחה הסתיימה.

**שאלה 3.** א. הראו כי הבאים שקולים עבור $n, m$ טבעיים:

(1) $n \subset m$

(2) $n \in m$

(3) $n < m$

ב. הראו כי מתקיים עבור $n$ טבעי כי: $n \subset \mathcal{P}(n)$

**פתרון:**

א. נשתמש בעובדה כי: $n = \{i \colon i < n\}$.

(1)⇔(2): $n \in m \Leftrightarrow \min(m \setminus n) = n \Leftrightarrow n \subset m$ (שימו לב כי דרוש לנמק מדוע $\min(m \setminus n) = n$)

(2) ⇔ (3): לפי ההבחנה ברור.

ב. יהי $n$ טבעי, נרצה להראות כי $n \subset \mathcal{P}(n)$. נראה זאת באמצעות הגדרת הכלה:

$$k \in n \Rightarrow k \subset n \Rightarrow k \in \mathcal{P}(n).$$

ההוכחה הסתיימה.

**שאלה 4.** נגדיר לכל $n$ טבעי; $A_n = n$ חשבו, והוכיחו כי החישוב נכון, את:

(1) $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$

(2) $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$

**פתרון:**

(1) נראה כי $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \mathbb{N}$ בעזרת הכלה דו כיוונית.

"$\subseteq$" ברור (למה?).

"$\supseteq$" יהי $n \in \mathbb{N}$, אזי $n \in A_{n+1}$ לפי הגדרת המספר הטבעי $n+1$ ולכן לפי הגדרת איחוד אינסופי של קבוצות, נובע כי $n \in \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. כדרוש.

(2) נראה כי $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \emptyset$. נחשב: $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \emptyset \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset.$

**שאלה 5.** א.תהי $\langle A_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ מנייה של קבוצות אינסופיות. הוכיחו כי:

$$x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \iff \{n : x \in A_n\} \text{ infinite}$$

ב. חשבו,והוכיחו כי החישוב נכון ,את: $\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{t=n}^{\infty} [t, t^2]$

**פתרון:**

א. ראשית נרצה להבין את הקבוצה: $\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ נסמן: $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ (שימו לב כי ישנה תלות ב-$n$).

כעת מתקיים:

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n =_{\text{def}} \{x \colon \forall n \in \mathbb{N}\,(x \in B_n)\}$$
$$=_{\text{def}} \{x \colon \forall n \in \mathbb{N}\,\exists k \geq n\,(x \in A_k)\}$$

"$\Leftarrow$" נניח $x$ נמצא באינסוף מבין הקבוצות: $\langle A_n \colon n \in \mathbb{N}\rangle$ נראה כי $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. נפעל לפי הפירוש שלנו לקבוצה; יהי $n$ טבעי נסתכל על $k = \min(\{n \colon x \in A_n\} \setminus n+1)$ נשים לב ש $k$ מוגדרת מכיוון שהקבוצה: $\{n \colon x \in A_n\}$ אינסופית ולכן בהכרח יש מספר טבעי יותר גדול מ-$n$ טבעי נתון, ולפי הגדרת המינימום מתקיים $x \in A_k$ כדרוש.

"$\Rightarrow$" באופן שקול נניח כי $\{n \colon x \in A_n\}$ סופית, ונראה כי $x \notin \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. ניקח $n = \max(\{n \colon x \in A_n\})+1$ כעת עבור $n$ הנ"ל יהי $k$ טבעי כלשהו שהוא לפחות $n$, אזי מהגדרת $n$, נובע כי $x \notin A_k$. ולכן לפי הפענוח שעשינו לקבוצה $\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ נקבל כי $x \notin \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. ההוכחה הסתיימה.

ב. נראה כי: $\bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{t=n}[t,t^2]=\emptyset$. למען נוחות נסמן: $A=\bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{t=n}[t,t^2]$. נשים לב כי תמיד מתקיים $\bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{t=n}[t,t^2]\supseteq\emptyset$, לכן אם נראה כי הפסוק $\exists x\in\mathbb{R}\colon x\in A$ הוא סתירה אז ישנו שוויון (חישבו מדוע). יהי $x\in A$ ניקח $t=\lfloor x\rfloor+1$ (שימו לב כי $t$ הנ"ל הוא מספר טבעי: $\lfloor x\rfloor=\min\{n\colon(n\in\mathbb{N})\wedge(n\leq t)\}$). אזי לכל $t\geq n$, מתקיים כי $x\notin[n,n^2]$. בסתירה להגדרה של $A$.

**שאלה 6.** הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

יהי $\langle A_n\colon n\in\mathbb{N}\rangle$ מנייה של קבוצות. כך שעבור $n>m$ טבעיים מתקיים: $A_m\subseteq A_n$. ובנוסף החיתוך בין הקבוצות לא ריק, כלומר; $\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n\neq\emptyset$. יהי $B$ קבוצה, כך ש $B\subset A_m$ עבור $m$ טבעי כלשהו, ומתקיים: $\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n\subset B$. אזי קיים $k$ טבעי כך ש: $A_k\subset B$.

**פתרון:** נפריך. ניקח $A_n:=\{k\colon(k=0)\vee(k\geq n)\}$, $B=\{0,1\}$. אזי מתקיים:

- $\forall m>n\in\mathbb{N}\ (A_m\subset A_n)$
- $\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n=1\neq\emptyset$ (יש להוכיח זאת)
- $\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n=1\subset\{0,1\}=B$
- $B\subset A_0$

אבל לא קיים $k$ טבעי כך ש $B\subset A_k$ מכיוון שלכל $k$ טבעי $A_k$ אינסופית.