מבנים דיסקרטיים – תרגיל 2

תאריך הגשה: 12.3.2013

1. הראו שקבוצת התמורות $\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\} \subset S_4$ היא חבורה. זהו את טבלת

תשובה:

הכפל שלה עם חבורה שראיתם בתרגול.

נבנה טבלת כפל

	(1)	$(12)(34)$	$(13)(24)$	$(14)(23)$
(1)	(1)	$(12)(34)$	$(13)(24)$	$(14)(23)$
$(12)(34)$	$(12)(34)$	(1)	$(14)(32)$	$(13)(24)$
$(13)(24)$	$(13)(24)$	$(14)(23)$	(1)	$(12)(34)$
$(14)(23)$	$(14)(23)$	$(13)(24)$	$(12)(34)$	(1)

לפי טבלת הכפל רואים סגירות, האסוציאטיביות נובעת מאסוציאטיביות של הרכבת פונקציות.

איבר היחידה הוא (1).

רואים שלכל איבר יש הפכי (האיבר עצמו).

בנוסף ניתן לראות שהחבורה אבלית.

ניתן לבדוק שלחבורה זו יש אותה טבלת כפל כמו לחבורה $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (חיבור רכיב רכיב).

2. הראו כי אם במונואיד מתקיים $aba = a$ וגם $ab^2a = e$ (כאשר e הוא איבר היחידה) אזי $a = b^{-1}$ (כלומר $ab = ba = e$).

תשובה:

נכפיל את היחס $aba = a$ ב b^2a מימין ונקבל $abab^2a = ab^2a$, ואם מפעילים את היחס השני אז מקבלים $ab = e$. באופן דומה אם מכפילים את $aba = a$ ב ab^2 משמאל אז מקבלים $ba = e$.

3. הגדירו 5 אגודות שונות על הקבוצה $S=\{a,b\}$ (עליכם להגדיר את פעולת הכפל בכל אגודה, ולהוכיח שהיא מגדירה אגודה).

תשובה: ניתן 5 טבלאות כפל (הסגירות ברורה מטבלאות הכפל, צריך רק לבדוק אסוציאטיביות):

$*$	a	b
a	a	a
b	a	a

$*$	a	b
a	a	a
b	a	b

$*$	a	b
a	a	a
b	b	b

$*$	a	b
a	a	b
b	a	b

$*$	a	b
a	a	b
b	b	a

ע"מ לבדוק אסוציאטיביות, יש לבדוק את כל השיוונות הבאים בכל אחת מטבלאות הכפל:

אסוצ:

$$a(aa)=(aa)a$$
$$a(ab)=(aa)b$$
$$a(ba)=(ab)a$$
$$a(bb)=(ab)b$$
$$b(aa)=(ba)a$$
$$b(ab)=(ba)b$$
$$b(ba)=(bb)a$$
$$b(bb)=(bb)b$$

עבור הקבוצות והפעולות הבאות קבע האם: מאגמה, קומוטטיבי, אסוציאטיבי, אגודה,קיימת יחידה ימנית, קיימת יחידה שמאלית.

.4

$G = \{x, y, z\}$

עם

$\forall a,b \in G \qquad a \circ b = \begin{cases} c \in G : c \neq a,b & when \quad a \neq b \\ a \quad when \quad a = b \end{cases}$

תשובה:

$a \in G$ או $a \circ b = c \in G \qquad \forall a,b \in G$

לכן $(G,\circ)$ מאגמה

$a \circ b = \begin{cases} c \in G : c \neq a,b & when \quad a \neq b \\ a \quad when \quad a = b \end{cases} = \begin{cases} c \in G : c \neq a,b & when \quad b \neq a \\ b \quad when \quad a = b \end{cases} = b \circ a \Rightarrow$ קומוטטיבי

לא אסוציאטיבי כיוון שכאשר כולם שונים:

$(a \circ b) \circ c = c \circ c = c \neq a = a \circ a = a \circ (b \circ c)$

ולכן לא אגודה.

לא קיימת יחידה ימנית/שמאלית כיוון שיתכן כי x, y, z שונים וכל אחד נייטרלי לעצמו בלבד.

.5

G

עם

$\forall a,b \qquad a \circ b = b * a$

כאשר נתון $(G,*)$ אגודה.

תשובה:

$\forall a,b \in G \qquad b * a \in G \Rightarrow a \circ b \in G$

לכן G מאגמה.

לא נתון כי * קומוטטיבי על G ולכן גם לא ניתן להסיק כי $\circ$ קומוטטיבי על G.

$\forall a,b,c \in G \qquad (c*b)*a = c*(b*a) \Rightarrow a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \Rightarrow$ אסוצ' $\Rightarrow$ אגודה

לא ניתן לומר אם קיים איבר נייטרלי היות וזה אינו ידוע לגבי $(G,*)$.

.6

$$G=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right\}$$

עם כפל מטריצות.

תשובה: נבנה ל G את טבלת הפעולה:

$\bullet$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

לכן: G מאגמה (כל התוצאות ב G), קומוטטיבי(הטבלה סימטרית), אסוצ'(מתוך אסוצ' של כפל מט') ולכן אגודה, נשים לב כי הטור והשורה של $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ זהים לטור השמאלי והשורה העליונה ולכן $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ הוא יחידה כאן.