תרגול 4 - אנליזה פונקציונלית

17 בדצמבר 2018

1. הראו שכל איבר בקבוצת קנטור ניתן לבטא כגבול של טור מהצור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

כאשר $a_n \in \{0,2\}$. הסיקו שקבוצת קנטור היא קבוצת המספרים בקטע $[0,1]$ שיש להם הצגה בבסיס טרנארי אשר לא מכילה את 1.

הערה: בסיס טרנארי היא הצגה שאר משתמשת רק בספרות $0,1,2$ - בדומה לבסיס בינארי שמשתמש רק בספרות $0,1$. כך למשל ההצגה של 4 בבסיס טרנארי היא 11, שכן $4 = 1 \cdot 3^1 + 1$.

2. הראו שקבוצות הבאות הן ממידה 0.

(א) אוסף כל המספרים בקטע $[0,1]$, שלא מכילים את הספרה 5 בפיתוח שלהם היא ממידה 0. (כלומר קיימת להם הצגה שלא מכילה את הספרה 5. כך למשל $0.4999999...$ היא הצגה נוספת של $\frac{1}{2}$.)

(ב) כל המספרים בקטע $[0,1]$ אשר קיימת להם הצגה שלא מכילה את הספרה D בבסיס הקסהדצימלי.

(ג) אוסף כל המססברים בקטע $[0,1]$ שקיימת להם הצגה שלא מכילה רצף של 8 פעמים 1.

(ד) אוסף כל המספרים הממשיים אשר לא מכילים את הרצף הספרה 123456789 בפיתוח. (רמז - הראו תחילה לקטע...).

3. תהי $f : X \to Y$, תהי $A \subseteq P(Y)$, ותהי $\sigma(A)$ הסיגמא־אלגברה הנוצרת על ידי A. הראו ש $\sigma\left(f^{-1}(A)\right) = f^{-1}(\sigma(A))$.

4. יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה חיובית.

(א) נביט בהשלמה של Σ ביחס ל μ.

$$\Sigma_\mu = \{A \cup N | A \in \Sigma \wedge (\exists M \in \Sigma : N \subseteq M \wedge \mu(M) = 0)\}.$$

(כלומר אוסף כל האיחודים מהצורה $A \cup N$ כאשר $A \in \Sigma$ ו N היא תת־קבוצה של קבוצה ממידה 0). הראו ש Σ_μ היא σ־אלגברה.

(ב) הראו שאם הרחבת μ על Σ_μ על ידי $\mu(A \cup N) = \mu(A)$, היא מידה על Σ_μ.

(ג) הראו שאם הרחבת μ היא מידה שלמה על Σ_μ. כלמר: אם $M \in \Sigma_\mu$, $\mu(M) = 0$ ו $N \subseteq M$ אזי $N \in \Sigma_\mu$.

(ד) יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה ותהי Σ_μ השלמה של Σ ביחס ל μ . עבור $A \subseteq X$ נגדיר

$$\mu_0 = \sup\{\mu(B) | B \subseteq A, B \in \Sigma\}$$
$$\mu^0 = \inf\{\mu(B) | A \subseteq B, B \in \Sigma\}.$$

הראו שלכל $A \in \Sigma_\mu$ מתקיים $\mu^0(A) = \mu_0(A)$ ושלכל $A \subseteq X$, אם $\mu_0(A) = \mu^0(A)$ אזי $A \in \Sigma_\mu$.