

## אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 6

27 בינואר 2019

1. בדקו האם הפונקציות הבאות גזירות, ואם כן מצאו את הנגזרת:

$$f(x + yi) = \cos x \cos y + \sin x \sin yi \quad (\text{א})$$

$$f(x + yi) = xy + \frac{y^2 - x^2}{2}i \quad (\text{ב})$$

**פתרון:**

א. נבדוק קושי רימן:  $U(x, y) = \cos x \cos y, V(x, y) = \sin x \sin y$ ; לכן:

$$U_x = -\sin x \cos y, U_y = -\cos x \sin y$$

$$V_x = \cos x \sin y, V_y = \sin x \cos y$$

וכיון ש  $U_x \neq V_y$  נקבל שהפונקציה לא גזירה.

ב.  $U(x, y) = xy, V(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{2} = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}$ . ולכן:

$$U_x = y, U_y = x$$

$$V_x = -x, V_y = y$$

תנאי קושי רימן מתקיים:  $U_x = V_y, U_y = -V_x$ , ולכן הפונקציה גזירה ונגזרתה היא:

$$f'(x + yi) = U_x + V_x i = y - xi$$

2. תהי  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  פונקציה גזירה. כידוע, יש  $U, V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  כך ש-

$$f(x + yi) = U(x, y) + V(x, y)i$$

הוכיחו שאם  $V$  פונקציה קבועה אז  $f$  קבועה גם (במילים: אם החלק המדומה של  $f$  קבוע, אז  $f$  קבועה).

**פתרון:**

$f$  גזירה, ולכן מתקיימות משוואות קושי רימן. כלומר מתקיים:  $U_x = V_y, U_y = -V_x$ . כעת, כיון שנתון לנו ש- $V$  פונקציה קבועה (נניח  $V = c_1$ ) לכן נגזרתה אפס, ולכן:  $U_x = V_y = 0, U_y = -V_x = 0$ , ולכן גם  $U$  קבועה (נניח  $U = c_2$ ). בסה"כ נקבל:  $f = U + iV = c_2 + ic_1$  פונקציה קבועה.

3. חשבו את המספרים הבאים (התוצאה צריכה להיות מספר מרוכב בהצגה קרטזית או פולרית):

$$e^{1+2i} \quad (\text{א})$$

$$e^{5\text{cis}\pi} \quad (\text{ב})$$

$$\sin(1 + i) \quad (\text{ג})$$

$$\cos(2\text{cis}\frac{\pi}{6}) \quad (\text{ד})$$

$$\ln(3 - 4i) \quad (\text{ה})$$

$$e\text{cis}\frac{\pi}{4}^{1-i} \quad (\text{ו})$$

**פתרון:**

$$.e^{1+2i} = e^1 \text{cis}2 = e\text{cis}2 \quad \text{א.}$$

$$.e^{5\text{cis}\pi} = e^{-5} \quad \text{ב.}$$

$$\text{כעת } \sin(1+i) = \frac{e^{i(1+i)} - e^{-i(1+i)}}{2i} = \frac{e^{-1+i} - e^{1-i}}{2i} = \frac{e^{-1}\text{cis}1 - e^1\text{cis}(-1)}{2i} = \frac{e^{-1}(\cos 1 + \sin 1 \cdot i) - e(\cos(-1) + \sin(-1)i)}{2i} \quad \text{ג.}$$

$$\sin 1 \frac{e^{-1} + e}{2} + \text{לכן נקבל: } \frac{1}{i} = -i \text{ וניזכר ש } \cos(-x) = \cos x, \sin(-x) = -\sin x \text{ ניזכר ש } \cos 1 \frac{e^{-1} - e}{2} i$$

$$\text{ד. } \cos(2\text{cis}\frac{\pi}{6}) = \frac{e^{i \cdot 2\text{cis}\frac{\pi}{6}} + e^{-i \cdot 2\text{cis}\frac{\pi}{6}}}{2} = \frac{e^{2\text{cis}\frac{4\pi}{6}} + e^{2\text{cis}\frac{10\pi}{6}}}{2} = \frac{e^{-1+\sqrt{3}i} + e^{1-\sqrt{3}i}}{2} = \frac{e^{-1}\text{cis}\sqrt{3} + e\text{cis}(-\sqrt{3})}{2} \\ = \frac{\cos\sqrt{3}(e+e^{-1}) + i\sin\sqrt{3}(e^{-1}-e)}{2} = \cos\sqrt{3} \frac{e+e^{-1}}{2} + \sin\sqrt{3} \frac{e^{-1}-e}{2} i \text{ איברים דומים ולצורה הקרטזית:}$$

$$\text{ה. } \ln(3 - 4i) = \ln(5\text{cis} - 0.927) = \ln 5 + -0.927i$$

$$\text{ו. } e\text{cis}\frac{\pi}{4}^{1-i} = e^{(1-i)\ln(e\text{cis}\frac{\pi}{4})} = e^{(1-i)(\ln e + \frac{\pi}{4}i)} = e^{1+\frac{\pi}{4} + (\frac{\pi}{4}-1)i} = e^{1+\frac{\pi}{4}} \text{cis}(\frac{\pi}{4}-1)$$

4. הוכיחו (היעזרו בתרגילים הדומים שעשינו בכיתה):

$$\sin(\bar{z}) = \overline{\sin(z)} \quad (\text{א})$$

$$\cos(\bar{z}) = \overline{\cos(z)} \quad (\text{ב})$$

(ג) אם  $z \neq 0$  ואיננו ממשי שלילי אז:  $\bar{z}^{\bar{w}} = \overline{z^w}$  הדרכה: תשאירו את  $z, w$  כמות שהם ואל תרשמו אותם בצורה קרטזית או פולרית. תלכו לפי הגדרת החזקה המרוכבת.

**פתרון:**

$$\text{א. } \sin(\bar{z}) = \frac{e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}}}{2i} = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} \text{ כעת, כיון שראינו בתרגול ש } e^{\bar{z}} = \overline{e^z} \text{ נוכל להמשיך: } \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = \overline{\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{-2i}} = \overline{\sin(z)}$$

$$\text{שגם במכנה תהיה הצמדה נרשום: } 2i = -\overline{-2i} \text{ ונקבל: } \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{-2i} = \overline{\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)} = \overline{\sin(z)}$$

$$\text{ב. באופן דומה: } \cos(\bar{z}) = \frac{e^{i\bar{z}} + e^{-i\bar{z}}}{2} = \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} = \overline{\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}} = \overline{\cos(z)}$$

ג. לפי הגדרת החזקה המרוכבת:  $z^w = e^{w \ln z}$  לכן נקבל:  $\bar{z}^{\bar{w}} = e^{\bar{w} \ln \bar{z}}$  ראינו בתרגול שלכל מרוכב  $z$  שאינו ממשי שלילי מתקיים  $\ln \bar{z} = \overline{\ln z}$  לכן נקבל אצלנו:  $e^{\bar{w} \ln \bar{z}} = \overline{e^{w \ln z}} = \overline{z^w}$  ועכשיו נשתמש בעובדה ש  $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$  ונקבל:  $\bar{z}^{\bar{w}} = \overline{z^w}$  נפתח את

דרך נוספת: נרשום  $z = r\text{cis}\theta, w = a + bi$ , ולכן:  $\bar{z} = r\text{cis} - \theta, \bar{w} = a - bi$  (ואם  $\theta$  בענף הראשי, אז גם  $-\theta$ ). נפתח את שני האגפים ונראה שמגיעים לאותו דבר:

$$\bar{z}^{\bar{w}} = e^{\bar{w} \ln \bar{z}} = e^{(a-bi)\ln(r\text{cis}-\theta)} = e^{(a-bi)(\ln r - i\theta)} = e^{a \ln r - b\theta - (a\theta + b \ln r)i} = e^{a \ln r - b\theta} \text{cis} - (a\theta + b \ln r)$$

$$\overline{z^w} = \overline{e^{w \ln z}} = \overline{e^{(a+bi)\ln(r\text{cis}\theta)}} = \overline{e^{(a+bi)(\ln r + i\theta)}} = \overline{e^{a \ln r - b\theta + (a\theta + b \ln r)i}} = \overline{e^{a \ln r - b\theta} \text{cis}(a\theta + b \ln r)} = e^{a \ln r - b\theta} \text{cis} - (a\theta + b \ln r)$$

בהצלחה!