זהבית צבי

פתרון תרגיל בית 9 פונקציות מרוכבות למתמטיקה – נקודות סינגולריות, טור לורן

שאלה 1

תהי z_0 סינגולריות עיקרית של $f(z)$. הוכיחו כי לכל N טבעי ולכל M ממשי קימת סדרה $z_n \to z_0$ כך ש- $\left|(z_n - z_0)^N f(z)\right| \ge M$.

הוכחה

יהי N טבעי ו- M ממשי. נגדיר $g(z) = (z - z_0)^N f(z)$.

נניח בשלילה שיש סביבה מנוקבת U של z_0 שבה מתקים $|g(z)| < M$, כלומר $g(z)$ חסומה בסביבה U.

לפי טענה בדף סיכום, מכיוון שהפונקצי'ה $g(z)$ חסומה סביב z_0, יש לה סינגולריות סליקה ב- z_0. נבודד את $f(z)$ ונקבל: $f(z) = (z - z_0)^{-N} g(z)$. לכן $f(z)$ בעלת קוטב (מסדר לכל היותר N) ב- z_0 וזאת בסתירה לכך ש- z_0 היא סינגולריות עיקרית של $f(z)$. לכן לא קימת סביבה מנוקבת של z_0 שבה מתקים $|g(z)| < M$.

לכן אפשר ליצר סדרה $z_n \to z_0$ שעבורה $|g(z)| \ge M$ באופן הבא:

בעיגול ברדיוס 1 סביב z_0 יש נקודה z_1 כך ש- $|g(z_1)| \ge M$ ובאופן כללי בעיגול ברדיוס $\frac{1}{n}$ סביב z_0 יש נקודה z_n כך ש- $|g(z_n)| \ge M$ וכו'. מש"ל.

שאלה 2

נניח $f(z)$ אנליטית בטבעת מהסוג $0 < |z| < R$ עבור $R > 0$.

א. האם יתכן שטור לורן של $f(z)$ בטבעת זו מכיל רק חזקות חיוביות ($n \ge 0$) וטור לורן של $\frac{1}{f(z)}$ באותה הטבעת מכיל רק חזקות שליליות ($n \le 0$)? נמקו את תשובתכם.

ב. האם יתכן שטור לורן של $f(z)$ בטבעת זו מכיל רק חזקות חיוביות ($n \ge 0$) וטור לורן של $\frac{1}{f(z)}$ באותה הטבעת מכיל ∞ חזקות שליליות? נמקו.

פתרון

א. כן, זה יתכן. לדוגמא, טור לורן של $f(z)=z$ מכיל רק חזקות חיוביות (בעצם רק חזקה אחת), וטור לורן של $\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{z}$ - מכיל רק חזקות שליליות (חזקה שלילית אחת).

ב. זה לא יתכן. אם ל-$f(z)$ יש רק חזקות חיוביות אז היא אנליטית או שהסינגולריות שלה בנקודה 0 היא סליקה, ואז הגבול $\lim_{z\to0} f(z)$ קים וסופי, שלומר שווה למספר מרוכב כלשהו. כעת, אם $\lim_{z\to0} f(z)\neq 0$ אז $\lim_{z\to0}\frac{1}{f(z)}$ גם מספר סופי, ואם $\lim_{z\to0} f(z)=0$ אז $\lim_{z\to0}\frac{1}{f(z)}=\infty$, כלומר $\lim_{z\to0}\frac{1}{f(z)}$ קים במובן הרחב, כמספר סופי או אינסוף, לכן $z=0$ אינה סינגולרית עיקרית אז בטור לורן אין אינסוף חזקות שליליות.

שאלה 3

נניח כי הפונקציות $f(z),g(z),r(z),h(z)$ אנליטיות בסביבה מנוקבת של $z_0\in\mathbb{C}$.

עוד נניח כי ל- f קוטב מסדר 2 ב- z_0, ל- g אפס מסדר 3 ב- z_0, ל- r אפס מסדר 2 ול- h אפס מסדר 1. מהו סוג הסינגולריות של

א. $\frac{f(z)g(z)}{r(z)+h(z)}$

ב. $\frac{f(z)+g(z)}{r(z)+h(z)}$

בנקודה z_0?

פתרון

לפי הנתונים בשאלה והגדרת סדר אפס וסדר קוטב, קימות פונקציות אנליטיות h,f,g ו- $\tilde{r}$ אינן מתאפסות ב- z_0 כך ש-

$$f(z)=(z-z_0)^{-2}f(z)\,,\ g(z)=(z-z_0)^3 g(z)\,,\ r(z)=(z-z_0)^2\tilde{r}(z)\,,\ h(z)=(z-z_0)h(z)$$

א. נציב את כל אלה לתוך הפונק' $\frac{f(z)g(z)}{r(z)+h(z)}$ ונקבל:

$$\frac{f(z)g(z)}{r(z)+h(z)}=\frac{(z-z_0)^{-2}f(z)\cdot(z-z_0)^3 g(z)}{(z-z_0)^2\tilde{r}(z)+(z-z_0)h(z)}=\frac{\cancel{(z-z_0)}\widetilde{f(z)}\widetilde{g(z)}}{\cancel{(z-z_0)}\left[(z-z_0)\tilde{r}(z)+\widetilde{h(z)}\right]}$$

קיבלנו מנה של פונקציות אנליטיות עם מכנה לא מתאפס בנקודה z_0 לכן לפונקצי'ה $\frac{f(z)g(z)}{r(z)+h(z)}$ יש סינגולריות סליקה ב- z_0.

ב. נציב את כל אלה לתוך הפונק' $\frac{f(z)+g(z)}{r(z)+h(z)}$ ונקבל:

$$\frac{f(z)+g(z)}{r(z)+h(z)}=\frac{(z-z_0)^{-2}f(z)+(z-z_0)^3g(z)}{(z-z_0)^2\tilde{r}(z)+(z-z_0)h(z)}=\frac{(z-z_0)^{-2}\left[f(z)+(z-z_0)^5g(z)\right]}{(z-z_0)\left[(z-z_0)\tilde{r}(z)+h(z)\right]}$$

$$=(z-z_0)^{-3}\frac{f(z)+(z-z_0)^5g(z)}{(z-z_0)\tilde{r}(z)+h(z)}$$

לכן לפי הגדרה של סדר קוטב מקבלים שלפונקצי'ה $\frac{f(z)+g(z)}{r(z)+h(z)}$ יש קוטב מסדר 3 ב- z_0.

<u>שאלה 4</u>

פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^2(z-2)}$ לטור לורן בטבעת הנתונה:

א. $|z-2|>2$ (זהו חוץ עיגול סביב $z_0=2$ ברדיוס 2).

ב. $0<|z-2|<2$ (זהו עיגול נקוב סביב $z_0=2$ ברדיוס 2, ללא הנקודה z_0 עצמה).

<u>פתרון</u>

א. נפתח את $\frac{1}{z^2}$ סביב $z_0=2$:

נשתמש בפיתוח הנדסי בטבעת $|z-2|>2$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z-2+2}=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z-2}}=\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^n(z-2)^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n(z-2)^{-n-1}$$

נגזור לקבל:

$$-\frac{1}{z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}-(n+1)(-2)^n(z-2)^{-n-2}$$

נכפול במינוס ובאיבר הנתון בטור $\frac{1}{z-2}$ ונקבל:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-2)^n(z-2)^{-n-3}$$

ניתן לראות שהפיתוח הוא בתחום $|z-2|>2$ לפי תחום התכנסות של הטור ההנדסי.

ב. נשתמש בפיתוח הנדסי בטבעת $0<|z-2|<2$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z-2+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-2}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(z-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-2)^n$$

נגזור לקבל:

$$-\frac{1}{z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{2^{n+1}}(z-2)^{n-1}$$

נכפול במינוס ובאיבר הנתון בטור $\frac{1}{z-2}$ ונקבל:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-2)^{n-2}$$

אנו רואים שאכן זה תחום ההתכנסות $|z-2|<2$ לפי תחום התכנסות של הטור ההנדסי שהשתמשנו בו. והוא אותו התחום גם בטור הגזור.

התחום הכולל הוא $0<|z-2|<2$ (עיגול נקוב) מכיוון שבטור שקיבלנו כפלנו ב- $\frac{1}{z-2}$ שלא מוגדר ב- $z=2$.

שאלה 5

פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{z^3}{(z+1)(z-2)}$ לטור לורן המתכנס בתחומים הבאים:

א. (*i*) $1<|z|<2$
(*ii*) $|z|>2$

ב. (*i*) $0<|z+1|<3$
(*ii*) $|z+1|>3$

(הופיעה בקובץ תרגול 11, שאלה מהטכניון עם תוספות)

פתרון

<u>הערה</u>: כאן בגלל המונה z^3 לא ניתן לכתוב ישירות כסכום של מחוברים, אלא לאחר פירוק לשברים של $\frac{1}{(z+1)(z-2)}$ והפיתוח המתאים לטור, כופלים ב-z^3.

א. נרשום את הפונקציה בצורה הבאה:

$$f(z)=\frac{z^3}{(z+1)(z-2)}=z^3\cdot\frac{1}{(z+1)(z-2)}$$

כעת נפרק את $\frac{1}{(z+1)(z-2)}$ לשברים חלקים:

$$\frac{1}{(z+1)(z-2)}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z-2}=\frac{A(z-2)+B(z+1)}{(z+1)(z-2)}$$

המכנה זהה, נשווה מונים לכל z ונקבל:

$$1=A(z-2)+B(z+1)=(A+B)z-2A+B$$

נשווה מקדמים ונקבל:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ \quad - \\ -2A+B=0 \end{cases} \Rightarrow\ 3A=1\ \Rightarrow A=\frac{1}{3}\ ,B=\frac{2}{3}$$

לכן הפירוק הוא:

$$(*)\ \frac{1}{(z+1)(z-2)}=\frac{1}{3}\cdot\underbrace{\frac{1}{z+1}}_{(I)}+\frac{2}{3}\cdot\underbrace{\frac{1}{z-2}}_{(II)}$$

נשתמש בפיתוחים לטור הנדסי:

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\ ,\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\ ,|z|<1$$

(i) אנו רוצים שהטור כולו יתכנס בטבעת $1<|z|<2$, כלומר גם בעיגול

$|z|<2$ וגם בחוץ עיגול $1<|z|$, לכן ניקח מחובר אחד של (*) ונפתח אותו לטור בעיגול $|z|<2$ ומחובר אחר נפתח לטור בחוץ עיגול $1<|z|$.

נפתח את המחובר (I) בחוץ עיגול $1<|z|\ \Leftrightarrow |z|>1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{z}\right|<1 = \frac{1}{|z|}$:

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}$$

נציב $\frac{1}{z}$ במקום z בפיתוח $\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$ ונקבל:

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$$

לכן

$$\frac{1}{z+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$$

מתכנס כאשר $\left|\frac{1}{z}\right|<1 \Leftrightarrow |z|>1$

נפתח את המחובר (II) בעיגול $|z|<2$:

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

נציב $\frac{z}{2}$ במקום z בפיתוח $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ ונקבל:

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{2^{n+1}}$$

מתכנס כאשר $\left|\frac{z}{2}\right|<1 \Leftrightarrow |z|<2$.

נציב טורים אלו ב-(*) ונקבל:

$$\frac{1}{(z+1)(z-2)}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{z^{n+1}}-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{2^{n+1}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n}}{z^{n+1}}-\frac{z^{n}}{2^{n}}\right)$$

פיתוח זה מתכנס בטבעת $1<|z|<2$.

<u>הערה</u>: אם ננסה לפתח את המחובר (II) בחוץ עיגול $1<|z|$ $\Leftrightarrow$ $|z|>1 \Leftrightarrow$ $< \left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$ 1, נקבל:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}$$

נציב $\frac{2}{z}$ במקום z בפיתוח $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n}$ ונקבל:

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n}}{z^{n+1}}$$

מתכנס כאשר $\left|\frac{2}{z}\right|<1 \Leftrightarrow |z|>2$, שהוא תחום חלקי, יותר קטן מהנדרש $1<|z|$, לכן לא ניתן לקבל את הפיתוח הנדרש בדרך זו.

נכפול ב-z^3 ונקבל תשובה סופית:

$$f(z)=\frac{z^{3}}{(z+1)(z-2)}=z^{3}\cdot\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n}}{z^{n+1}}-\frac{z^{n}}{2^{n}}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n}}{z^{n-2}}-\frac{z^{n+3}}{2^{n}}\right)$$

מתכנס בטבעת $1<|z|<2$.

(*ii*) כעת רוצים שהטור כולו יתכנס בחוץ עיגול $|z|>2$.

מצאנו בתת סעיף (*i*) פיתוח של המחובר (I) בחוץ עיגול $1<|z|$, שהוא תחום חלקי לחוץ עיגול המבוקש $|z|>2$ וקיבלנו:

$$\frac{1}{z+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{z^{n+1}}$$

כעת נפתח את המחובר (II) בחוץ עיגול $|z|>2 \Leftrightarrow \left|\frac{2}{z}\right|<1$:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z\left(1-\frac{2}{\mathrm{z}}\right)}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{\mathrm{z}}}$$

נציב $\frac{2}{z}$ במקום z בפיתוח $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ ונקבל:

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{\mathrm{z}}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$$

מתכנס כאשר $\left|\frac{2}{z}\right|<1 \Leftrightarrow |z|>2$.

נציב טורים אלו ב-(*) ונקבל:

$$\frac{1}{(z+1)(z-2)}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}+\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^{n+1}}{z^{n+1}}$$

פיתוח זה מתכנס בחוץ עיגול $|z|>2$.

נכפול ב-z^3 ונקבל תשובה סופית:

$$f(z)=\frac{z^3}{(z+1)(z-2)}=z^3\cdot\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^{n+1}}{z^{n+1}}$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^{n+1}}{z^{n-2}}$$

מתכנס בחוץ עיגול $|z|>2$.

ב. כאן נרצה לקבל טור בחזקות של $z+1$, כלומר טור סביב הנקודה $z=-1$.
כיוון שבפונקציה $f(z)=\frac{z^3}{(z+1)(z-2)}$ מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה, תחילה נבצע חילוק פולינומים (חילוק ארוך) באופן הבא:

$$\frac{z^3}{(z+1)(z-2)}=\frac{z^3}{z^2-z-2}$$

$$=\frac{(z^3-z^2-2z)+z^2+2z}{z^2-z-2}=\frac{z(z^2-z-2)+z^2+2z}{z^2-z-2}$$

$$=z+\frac{z^2+2z}{z^2-z-2}=z+\frac{(z^2-z-2)+3z+2}{z^2-z-2}$$

$$=z+1+\frac{3z+2}{z^2-z-2}=z+1+\frac{3z+2}{(z+1)(z-2)}$$

קיבלנו:

$$(**)\ f(z)=z+1+\frac{3z+2}{(z+1)(z-2)}$$

כעת נפרק את $\frac{3z+2}{(z+1)(z-2)}$ לשברים חלקים:

$$\frac{3z+2}{(z+1)(z-2)}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z-2}=\frac{A(z-2)+B(z+1)}{(z+1)(z-2)}$$

המכנה זהה, נשווה מונים לכל z ונקבל:

$$3z+2=A(z-2)+B(z+1)=(A+B)z-2A+B$$

נשווה מקדמים ונקבל:

$$\begin{cases} A+B=3 \\ - \\ -2A+B=2 \end{cases} \Rightarrow\ 3A=1\ \Rightarrow A=\frac{1}{3}\ ,B=\frac{8}{3}$$

לכן הפירוק הוא:

$$(***)\ \frac{3z+2}{(z+1)(z-2)}=\frac{1}{3}\cdot\underbrace{\frac{1}{z+1}}_{(I)}+\frac{8}{3}\cdot\underbrace{\frac{1}{z-2}}_{(II)}$$

כיוון שאנו רוצים טור בחזקות של $z+1$, נשים לב כי המחובר (I) הוא כבר חזקה כזאת: $\frac{1}{z+1}=(z+1)^{-1}$, והוא בסה"כ איבר אחד, כלומר סופי, ולכן מתכנס (מוגדר) לכל $z\neq-1$ $\Leftrightarrow |z+1|>0$.

נותר לפתח את המחובר (II) לטור בתחום המתאים.

(i) אנו רוצים שהטור כולו יתכנס בטבעת $0<|z+1|<3$, שהיא עיגול נקוב סביב הנקודה $z=-1$ ברדיוס 3.

נפתח את המחובר (II) בעיגול $|z+1|<3 \Leftrightarrow \left|\frac{z+1}{3}\right|<1$.

לצורך כך נעשה הזזה במכנה: $z-2=(z+1)-3$ ונקבל

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z+1)-3}=\frac{1}{3\left(\frac{z+1}{3}-1\right)}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+1}{3}}$$

נציב $\frac{z+1}{3}$ במקום z בפיתוח ההנדסי $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ ונקבל:

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+1}{3}}=-\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{3}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}$$

לכן,

$$\frac{1}{z-2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}$$

מתכנס כאשר $\left|\frac{z+1}{3}\right| < 1 \Leftrightarrow |z+1| < 3$.

נציב ב-(***) ונקבל:

$$\frac{3z+2}{(z+1)(z-2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z+1} + \frac{8}{3} \cdot \left(-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z+1} - \frac{8}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}$$

פיתוח זה מתכנס כאשר $|z+1| > 0$ וגם $|z+1| < 3$, כלומר בטבעת

$0 < |z+1| < 3$.

נציב ב-(**) ונקבל תשובה סופית:

$$f(z) = z+1 + \frac{3z+2}{(z+1)(z-2)} = (z+1) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z+1} - \frac{8}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}$$

מתכנס בטבעת $0 < |z+1| < 3$.

(ii) כעת רוצים שהטור כולו יתכנס בחוץ עיגול $|z+1| > 3$ סביב הנק' $z = -1$ ברדיוס 3.

נפתח את המחובר (II) בחוץ עיגול $|z+1| > 3 \Leftrightarrow \left|\frac{3}{z+1}\right| < 1$.

לצורך כך נעשה הזזה במכנה: $z - 2 = (z+1) - 3$ ונקבל

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z+1)-3} = \frac{1}{(z+1)\left(1 - \frac{3}{z+1}\right)} = \frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{z+1}}$$

נציב $\frac{3}{z+1}$ במקום z בפיתוח $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ונקבל:

$$\frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{z+1}} = \frac{1}{z+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{z+1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(z+1)^{n+1}}$$

מתכנס כאשר $\left|\frac{3}{z+1}\right| < 1 \Leftrightarrow |z+1| > 3$.

נציב ב-(***) ונקבל:

$$\frac{3z+2}{(z+1)(z-2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z+1} + \frac{8}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(z+1)^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z+1} + 8\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(z+1)^{n+1}}$$

פיתוח זה מתכנס בחוץ עיגול $|z+1| > 3$.

נציב ב-(**) ונקבל תשובה סופית:

$$f(z) = z + 1 + \frac{3z+2}{(z+1)(z-2)} = (z+1) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z+1} + 8\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(z+1)^{n+1}}$$

מתכנס בחוץ עיגול $|z+1| > 3$.

<u>שאלה 6</u>

תהי z_0 נקודת סינגולריות עיקרית של $f(z)$. תהי $g(z)$ פונקצי'ה שלמה ולא קבועה.
הוכיחו כי z_0 היא גם סינגולריות עיקרית של ההרכבה $g \circ f$.

<u>פתרון</u>

נתון כי $g(z)$ אינה פונקצי'ה קבועה, לכן קי'ימים $a \neq b \in \mathbb{C}$ כך ש-

$$g(a) \neq g(b)$$

בנוסף נתון כי z_0 היא נקודה סינגולרית עיקרית של $f(z)$, לכן $\lim_{z \to z_0} f(z)$ לא קי'ים.
מהגדרת הגבול לפי הינה נקבל שקי'ימות שתי סדרות $\{a_n\},\{b_n\}$ המתכנסות לנקודה z_0,

$$a_n \underset{n\to\infty}{\to} z_0 \,,\, b_n \underset{n\to\infty}{\to} z_0$$

כך ש-

$$f(a_n) \underset{n\to\infty}{\to} a \,,\, f(b_n) \underset{n\to\infty}{\to} b$$

כעת נתון כי g שלמה, בפרט היא רציפה ב- z_0, לכן מתקי'ים

$$g\big(f(a_n)\big) \underset{n\to\infty}{\to} g(a) \,,\, g\big(f(b_n)\big) \underset{n\to\infty}{\to} g(b)$$

ראינו כי $g(a) \neq g(b)$ ולכן הגבול $\lim_{z \to z_0} g\big(f(z)\big)$ אינו קי'ים, כלומר z_0 היא סינגולריות עיקרית של ההרכבה $g \circ f$.