אינפי 1 תרגיל 8

1. הוכיחו/ הפריכו:
תהי (a_n) סדרה, כך ש $\sum a_n$ מתכנס, אז $\sum \frac{a_n}{n^2}$ מתכנס בהחלט.
פתרון:
הוכחה: אם $\sum a_n$ מתכנס, אז $|a_n| \to 0$. צריך להוכיח ש $\sum \frac{|a_n|}{n^2}$ מתכנס.
נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי עם $\frac{1}{n^2}$. $\lim \frac{|a_n|}{n^2} : \frac{1}{n^2} = \lim |a_n| = 0$. לכן התכנסות $\sum \frac{1}{n^2}$ גוררת התכנסות של $\sum \frac{|a_n|}{n^2}$. מש"ל.

2. הוכיחו:
$\sum a_n$ מתכנס בהחלט אמ"ם $\sum a_n b_n$ מתכנס, לכל סדרה חסומה (b_n).
פתרון:
$\Longleftarrow$: נניח ש$\sum a_n$ מתכנס בהחלט. כלומר, $\sum |a_n|$ מתכנס. תהי (b_n) סדרה חסומה. כלומר, קיים C ממשי כך $|b_n| < C$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
אזי: $|a_n b_n| < C|a_n|$ ולכן $\sum |a_n b_n|$ מתכנס. כידוע, זה גורר ש $\sum a_n b_n$ מתכנס.
$\Longrightarrow$: נניח ש $\sum a_n b_n$ מתכנס לכל סדרה חסומה (b_n). בפרט, עבור הסדרה החסומה הבאה:

$$b_n = \begin{cases} 1 & a_n \geq 0 \\ -1 & a_n < 0 \end{cases}.$$

אבל נשים לב ש$(a_n b_n) = (|a_n|)$. כלומר, קיבלנו ש $\sum |a_n|$ מתכנס. במילים: $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.