<u>הרצאה XXI- אינפי 1</u>

היום נוכיח את נוסחת טיילור שמצאנו בסוף ההרצאה הקודמת: $f\in D^{n+1}(a,b)\,,x_0\in(a,b)$. והביטוי הוא:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{n+1}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

הוכחה: $r_n(x_0,x)\coloneqq f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=\frac{f^{n+1}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$. כאשר $0<\theta<1$. כעת נביט ב$r_n(t,x)$. כאשר x_0,x קבועים. נקבל $r_n(t,x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$. כעת נביט בפונקציה $\psi(t)\coloneqq(x-t)^{n+1}$. וגם נגדיר פונקציה נוספת $\varphi(t)=r_n(t,x)$ לפי משפט קושי נקבל: $\exists c\in(x_0,x):\ \frac{\varphi(x_0)-\varphi(x)}{\psi(x_0)-\psi(x)}=\frac{\varphi'(t)}{\psi'(c)}$. אבל ידוע כי $\varphi(x_0)=r_n(x_0,x)$ וגם שמתקיים $\varphi(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k=f(x)-f(x)-0-0-\dots-0=0$. וגם ידוע כי $\psi(x_0)=(x-x_0)^{n+1}$ ו$\psi(x)=0$.

עד כאן קיבלנו $\frac{\varphi(x_0)-\varphi(x)}{\psi(x_0)-\psi(x)}=\frac{r_n(x_0,x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{\varphi'(t)}{\psi'(c)}$. כעת נגזור

$$\varphi'(t)=\frac{d}{dr}r_n(t,x)=-\left[f(t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right]'=-[f'(t)-\frac{f'(t)}{1!}+\frac{f''(t)}{1!}(x-t)-\frac{2}{2!}(x-t)f''(t)+\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2+\dots-\frac{nf^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^{n-1}+\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

נניח $t=c$ ונקבל $\varphi'(c)=-\frac{f^{(n+1)}}{n!}(x-c)^n$ וגם $\psi'(x)=-(n+1)(x-c)^n$ ולכן מתקבל $\frac{\varphi'(t)}{\psi'(c)}=\frac{-\frac{f^{(n+1)}}{n!}(x-c)^n}{-(n+1)(x-c)^n}=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}=\frac{r_n(x_0,x)}{(x-x_0)^{n+1}}$ ומכאן מתקבל הדרוש $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=r_n(x_0,x)$. מ.ש.ל.

מה השימושים של טיילור? אם הצלחנו להציג את $f\in D^n(a,b)\,,x_0\in(a,b)$ כך: $f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n)$, האם זה אומר ש$P_n(x)$ פולינום טיילור? התשובה היא כן !. נוכיח זאת.

<u>משפט</u>: אם $f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n)=Q_n(x)+o((x-x_0)^n)$ אזי $P_n(x)=Q_n(x)=$ פולינום טיילור.

הוכחה: נסמן $P_n(x)=p_0+p_1(x-x_0)+\dots+p_n(x-x_0)^n$ וגם $Q_n(x)=q_0+q_1(x-x_0)+\dots+q_n(x-x_0)^n$. ואז ע"פ המשפט $P_n(x)+o((x-x_0)^n)=Q_n(x)+o((x-x_0)^n)$. ז"א שמספיק להוכיח שמתקיים עבור ההפרש התנאי $\sum_{k=0}^{n}\underbrace{(p_k-q_k)}_{a_k}(x-x_0)^k=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k=o((x-x_0)^n)$. אבל $a_0=0$, ונמשיך להפעיל את הגבולות עד שנקבל שעבור כל המקדמים $a_0=a_1=a_2=\dots=a_n=0$. ואז $P_n(x)=Q_n(x)$.

דוגמא: $f\in D^\infty(-1,1)\,,f(x)=\frac{1}{1-x^2}$. נבדוק עבור $x_0=0$. מתקיים $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^{2k}=\sum_{k=0}^{n}x^{2k}+\underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty}x^{2k}}_{r_n}$ ואז ע"פ סדרה הנדסית נקבל $r_n=x^{2n+2}\frac{1}{1-x^2}=o(x^{2n+1}),x\to0$. ולכן $\frac{r_n}{x^{2n+1}}=\frac{x}{1-x^2}\to_{x\to0}0$ ואז $\sum_{k=0}^{\infty}x^{2k}=\sum_{k=0}^{n}x^{2k}=\frac{1}{1-x^2}$. וקיבלנו גם $P_{2n}=P_{2n+1}$.

<u>שימוש לגזירות</u>:

נניח $f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\dots+a_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$. ונקבל $a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

דוגמא: $f \in D^{\infty}(-1,1)$, $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$. מתקיים $m=2s+1$, $\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{(m)}(0)=0$ או $\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{(m)}(0)=\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{(2k)}(0)=0$

במקרה ש-$m=2k$. ואז $f(x)=1+x^2+\dots+x^{2m}+o(x^{2m})=f(0)+\dots+\frac{f^{(2m)}(0)}{(2m)!}x^{2m}+o(x^{2m})$ וגם $\frac{f^{(2m)}(0)}{(2m)!}=1$ גורר שמתקיים $\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{(2m)}(0)=(2m)!$.

תרגיל בית: $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(m)}(0)=?$, $\left(e^{x^2}\right)^{(m)}(0)=?$.

<u>אומדן של שארית</u>:

$x_0 \in (a,b)$, $f \in D^{n+1}(a,b)$, $f(x)=P_n(x_0,x)+\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$. כאשר $(0<\theta<1)$, $c=x_0+\theta(x-x_0)$. ונניח גם $\theta=\theta(x)$.

<u>משפט</u>: $x_0 \in (a,b)$, $f \in D^{n+1}(a,b)$. נניח שקיים M חיובי, כך ש $f^{(n+1)}(x)\le M$: $\forall x \in (a,b)$. אזי מתקיים עבור השארית $r_n(x_0,x)\le \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$.

הוכחה: $|r_n(x_0,x)|=\left|\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}\le \frac{M}{(n+1)!}|b-a|^{n+1}$ ולכן עבור $|x-x_0|<\delta$ מתקיים $|r_n|\le \frac{M}{(n+1)!}\delta^{n+1}<\varepsilon$ כאשר $\delta \ll 1$.

דוגמא: $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+r_6$. ז"א $\sin x \approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$ עבור $x\in(-1,1)$, $|x|<1$. וגם $\left|(sinx)^{(6)}\right|\le 1$ ולכן מתקיים עבור השארית $|r_6|\le \frac{1}{7!}2=\frac{2^7}{7!}<10^{-3}$. ובאופן כללי צריך למצוא $|r_n|\le \frac{1}{(n+1)!}2^n<\varepsilon$. עבור ε שלנו. (כאן הוא 10^{-3}).

<u>חישוב של גבולות</u>:

דוגמא: חשב את הגבול הבא: $\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$. ידוע כי $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)$ וגם $e^{-\frac{x^2}{2}}=1+\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{1!}+\frac{\left(-\frac{x^2}{2!}\right)^2}{2!}+o(x^4)$. לכן ומכאן

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)-1+\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{1!}+\frac{\left(-\frac{x^2}{2!}\right)^2}{2!}+o(x^4)}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{8}\right)x^4+o(x^4)}{x^4}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=-\frac{1}{12}+\lim_{x\to0}\frac{o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}.$$

דוגמא:

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{x}=\lim_{x\to0}e\,\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1}{x}=\lim_{x\to0}e\,\frac{e^{\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)-1}-1}{x}=\lim_{x\to0}e\,\frac{e^{1-\frac{x}{2!}+0(x)-1}-1}{x}=$$

$$\lim_{x\to0}e\,\frac{e^{-\frac{x}{2!}+0(x)}-1}{-\frac{x}{2!}+0(x)}\,\frac{-\frac{x}{2!}+0(x)}{x}=e\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{e}{2}$$

תרגיל בית: $\lim_{x\to0}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)=?$.

תדרוך: $\sqrt[6]{x^6-x^5}=x\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}$, $\sqrt[6]{x^6+x^5}=x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}$. התשובה הסופית היא 12.