22.7.2021

1. הוכיחו/הפריכו: W הוא תת מרחב של V במקרים הבאים:

(א) $V=\mathbb{R}^2$ ו $W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mid 0\le x,y\right\}$

פתרון: לא ת"מ. למשל ל $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\in W$ ו -2 ממשי אבל הכפל בסקלר בינהם

$$-2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}\notin W$$

(ב) $V=\mathbb{R}^2$ ו $W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mid (0\le x,y)\vee(0\ge x,y)\right\}$

פתרון: לא ת"מ. למשל ל $\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\in W$ אבל החיבור בינהם

$$\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\notin W$$

(ג) $V=\mathbb{R}^2$ ו $W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mid y=3x\right\}$.

פתרון: אתם ראיתם/תראו כי אוסף פתרונות למערכת הומגנית היא תמיד ת"מ. אצלנו

$$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mid y=3x\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mid 3x-y=0\right\}$$

וזה אוסף הפתרונות למערכת ההומגנית $3x-y=0$ (משוואה אחת, שני נעלמים).

(ד) $V=\mathbb{F}^{n\times n}$ ו $W=\{A\mid \forall i<j:\ A_{i,j}=0\}$ (המטריצות המשולשיות התחתונות. למשל $\begin{pmatrix}1&0&0\\4&2&0\\0&6&0\end{pmatrix}$ משולשית תחתונה).

פתרון: אכן ת"מ. נוכיח בעזרת הקריטריון המקוצר:

- קיום איבר האפס ב W: צ"ל $0\in W$. אכן $0\in W$ כי מטריצת האפס היא משולשית תחתונה.
- סגירות לחיבור וקטורים ב W: לכל $A_1,A_2\in W$ מתקיים $A_1+A_2\in W$.

הוכחה: יהיו $A_1,A_2\in W$ צ"ל $A_1+A_2\in W$. צ"ל שלכל $i<j$ מתקיים $(A_1+A_2)_{i,j}=0$. אכן

$$(A_1+A_2)_{i,j}=(A_1)_{i,j}+(A_2)_{i,j}=0+0=0$$

(כאשר השיויון השני נובע מכך ש $A_1,A_2\in W$ משולשיות תחתונות).

- סגירות לכפל בסקלר ב W: לכל $A\in W$ ולכל סקלר α מתקיים $\alpha A\in W$.
  הוכחה: תהא $A\in W$ ו α סלקר. צ"ל $\alpha A\in W$ אכן לכל $i<j$ מתקיים

$$(\alpha A)_{i,j}=\alpha A_{i,j}=\alpha 0=0$$

כנדרש.

(ה) $V=\mathbb{F}^{n\times n}$ ו $W=\{A\mid \exists B:\ AB=I\}\cup\{0\}$ קבוצת המטריצות ההפיכות ביחד עם מטריצת האפס.
פתרון: לא! לא סגור לחיבור. למשל

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$$

($\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\in W$ אבל לא החיבור שלהם).

(ו) $V=\mathbb{F}^{n\times n}$ ו W קבוצת המטריצות הלא הפיכות.
פתרון: לא! לא סגור לחיבור. למשל

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

(ז) $V=\mathbb{F}^{n\times n}$ ו $W=\{A\mid A^t=-A\}$ (קבוצת המטריצות האנטי-סימטריות).
זה אכן ת"מ. הוכחה:

- **קיום אפס**: אכן מטריצת האפס 0 היא אנטי-סימטרית ולכן $0\in W$
- **סגירות לחיבור וכפל בסקלר:** יהיו $A_1,A_2\in W$ ו α סקלר צ"ל $A_1+\alpha A_2\in W$. כיוון ש $A_1,A_2\in W$ נסיק כי

$$A_1^t=-A_1,\ A_2^t=-A_2$$

ולכן, בשימוש תכונות שיחלוף שראינו, נקבל

$$(A_1+\alpha A_2)^t=A_1^t+(\alpha A_2)^t=A_1^t+\alpha A_2^t=-A_1+\alpha(-A_2)=-(A_1+\alpha A_2)$$

וסיימנו.

(ח) $V=\mathbb{F}^{n\times n}$ ו $W=\{A\mid A^t=A\}$ (כלומר קבוצת המטריצות הסימטריות).
הוכחה: באופן דומה למטריצות האנטי-סימטריות.

(ט) $V = \mathbb{F}^{n\times n}$ ו $W = \{A \mid A^t = A\} \cap \{A \mid A^t = -A\}$.

פתרון: זהו אכן ת"מ.

הוכחה: כיוון שקבוצת המטריצות הסימטריות הן ת"מ. וגם קבוצת המטריצות האנטי-סימטריות הן ת"מ נקבל ש החיתוך שלהם הוא גם ת"מ.

(י) $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ ו $W = \{A \mid A^t = A\} \cup \{A \mid A^t = -A\}$.

פתרון: לא ת"מ. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ היא סימטרית ולכן ב W (והיא לא אנטי-סימטרית) בנוסף $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ מטריצה אנטי-סימטרית ולכן ב W (והיא לא סימטרית) אבל

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אינה ב W כי היא לא סימטרית והיא גם לא אנטי-סימטרית (ולכן אין סגירות ולכן זהו לא ת"מ).

(יא) $V = \mathbb{F}^{n\times n}$ ו $W = \{A \mid \mathrm{tr}A = 1\}$

פתרון: לא. למשל מטריצת האפס אינה ב W כי $\mathrm{tr}0 = 0$.

(יב) $V = \mathbb{F}^{n\times n}$ ו $W = \{A \mid \mathrm{tr}A = 0\}$

פתרון: זה אכן ת"מ. הוכחה:

- **קיום אפס**: אכן מטריצת האפס 0 מקיימת $\mathrm{tr}0 = 0$ ולכן $0 \in W$
- **סגירות לחיבור וכפל בסקלר:** יהיו $A_1, A_2 \in W$ ו α סקלר צ"ל $A_1 + \alpha A_2 \in W$. כיוון ש $A_1, A_2 \in W$ נסיק כי

$$\mathrm{tr}A_1 = 0,\ \mathrm{tr}A_2 = 0$$

ולכן, בשימוש תכונות ה tr שראינו, נקבל

$$\mathrm{tr}\left(A_1 + \alpha A_2\right) = \mathrm{tr}(A_1) + \mathrm{tr}(\alpha A_2) = \mathrm{tr}(A_1) + \alpha\mathrm{tr}(A_2) = 0 + \alpha 0 = 0 + 0 = 0$$

וסיימנו.

(יג) $V = \mathbb{R}_2[x]$ (מרחב הפולינומים עד דרגה 2, עם מקדמים ממשיים) ו $W = \left\{a + bx + cx^2 \mid b \neq 0\right\}$

פתרון: לא. למשל, פולינום האפס (שהוא וקטור האפס במרחב שלנו) שהוא $0 + 0x + 0x^2$ אינו שייך ל W.

(יד) $V = \mathbb{R}_2[x]$ ו $W = \{p(x) \in V \mid p(7) = 0\}$ (המחשה מה זה $p(7)$: אם $p(x) = 1+2x+3x^2$ אז $p(7) = 1+2\cdot 7+3\cdot 7^2$).

פתרון: זה אכן ת"מ. הוכחה:

- **קיום אפס**: אכן פולינום האפס $0 + 0x + 0x^2$ שייך ל W כי כשמציבים בו 7 אכן מקבלים 0.
- **סגירות לחיבור וכפל בסקלר:** יהיו $p_1(x), p_2(x) \in W$ ו α סקלר צ"ל $p_1(x) + \alpha p_2(x) \in W$. אכן, כיוון ש $p_1(x), p_2(x) \in W$ נקבל כי

$$p_1(7) = 0, p_2(7) = 0$$

ולכן
$$(p_1+\alpha p_2)(7)=p_1(7)+\alpha p_2(7)=0+\alpha 0=0$$

וסיימנו.

הערכה: ה 7 לא חשוב בתרגיל, גם $\{p(x)\in V\mid p(\pi)=0\}$ ת"מ.

2. חיתוך וסכום:

(א) במרחב $V=\mathbb{F}^{n\times n}$, מצאו את החיתוך והסכום של

$$W_1=\{A\mid \forall i>j:\ A_{i,j}=0\}$$

קבוצת המטריצות המשולשיות העליונות ו

$$W_2=\{A\mid \forall i<j:\ A_{i,j}=0\}$$

קבוצת המטריצות המשולשיות התחתונות (הוכחנו שקבוצת המטריצות התחתונות היא ת"מ. באופן דומה אפשר להוכיח כי קבוצת המטריצות העליונות היא ת"מ).

פתרון:

- החיתוך: נסמן את קבוצת המטריצות האלכסונית ב W והראה כי החיתוך $W_1\cap W_2=W$ ע"י הכלה דו-כיוונית:
  ($\supseteq$) כל מטריצה אלכסונית (כלומר כל $A\in W$) היא בפרט גם משולשית תחתונה וגם משולשית עליונה (ולכן $A\in W_1\cap W_2$).
  ($\subseteq$) מצד שני, תהא $A\in W_1\cap W_2$ מתקיים ש:
  לכל $i<j$ מתקיים $A_{i,j}=0$ וגם
  לכל $j<i$ מתקיים $A_{i,j}=0$ ולכן
  לכל $i\neq j$ מתקיים $A_{i,j}=0$ וזה אומר ש A אלכסונית, כלומר $A\in W$.
- סכום: $W_1+W_2=\mathbb{F}^{n\times n}$ (תזכורת $W_1+W_2=\{A_1+A_2\mid A_1\in W_1, A_2\in W_2\}$)
  הוכחה: בהכלה דו-כיוונית
  ($\subseteq$) ברור.
  ($\supseteq$) תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ וצ"ל $A\in W_1+W_2$. כלומר צריך למצוא $A_1\in W_1, A_2\in W_2$ כך ש

$$A=A_1+A_2$$

נגדיר
$$(A_1)_{i,j}=\begin{cases}0 & i>j\\ A_{i,j} & i\le j\end{cases}$$

ובאופן דומה
$$(A_2)_{i,j}=\begin{cases}A_{i,j} & i>j\\ 0 & i\le j\end{cases}$$

ואז $A_1 + A_2 = A$ וסיימנו. לדוגמה: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ הגדרנו

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

נשים לב ש A_1, A_2 לא יחידות, למשל גם

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

גם מקיימים שהסכום שלהם הוא A.

(ב) במרחב $V = \mathbb{R}^3$ ועבור

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

נגדיר

$$W_1 = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid A_1 v = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| A_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{cases} x_1 + x_3 & = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 & = 0 \end{cases} \right\}$$

$$W_2 = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid A_2 v = 0 \right\}$$

להיות מרחב הפתרונות למערכת ההומגנית. מצאו חיתוך שלהם והסכום שלהם.

פתרון:

- חיתוך: לפי הגדרה:

$$\begin{aligned}
W_1 \cap W_2 &= \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid (A_1 v = 0) \wedge (A_2 v = 0) \right\} \\
&= \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} v = 0 \right\} \\
&= \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} v = 0 \right\}
\end{aligned}$$

אפשר לדרג את $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ולהציג את החיתוך בצורה "יפה" יותר. הנה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הגענו לצורה מדורגת, ללא שורת סתירה (כי זה מערכת הומגונית) ובלי משתנים חופשיים (בכל עמודה יש איבר מוביל) ולכן יש פתרון יחיד שהוא הפתרון הטריוואלי. כלומר

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- סכום: נציג את W_1, W_2 בצורה שונה ע"י דירוג המטריצות A_1, A_2 ו"פתירת המערכת ההומגנית". נעשה זאת:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

באופן דומה:

$$A_2=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&3\\1&2&0\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$W_2=\left\{\begin{pmatrix}-2t\\t\\t\end{pmatrix}\mid t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\mid t\in\mathbb{R}\right\}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

כעת נחבר:

$$W_1+W_2=\left\{t\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\mid t,s\in\mathbb{R}\right\}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

הערה (תוכיחו/תראו בעתיד בהרצאה): $\text{span}S_1+\text{span}S_2=\text{span}\left(S_1\cup S_2\right)$

(ג) במרחב $V=\mathbb{C}^{n\times n}$ הסכום וחיתוך W_1 המוגדר להיות קבוצת המטריצות הסימטריות ו W_2 המוגדר להיות קבוצת המטריצות האנטי סימטריות.

- חיתוך: $W_1\cap W_2=\{0\}$ ראינו שהמטריצה היחידה שהיא גם סימטרית וגם אנטי-סימטרית היא מטריצת האפס.
- סכום: $W_1+W_2=\mathbb{C}^{n\times n}$ (בשיעורי בית ב XI (אולי אלה שיעלו בקרוב)).

3. סכום ישר: תזכורת: נגיד ש V הוא סכום ישר של ת"מ W_1,W_2 ונסמן $W_1\oplus W_2=V$ אם (1) $W_1+W_2=V$ (2) $W_1\cap W_2=\{0_V\}$.

(א) במרחב $V=\mathbb{C}^{n\times n}$ הוא סכום ישר של W_1 (המטריצות הסימטריות) ו W_2 המטריצות האנטי-סימטריות.

(ב) ראינו שבמרחב $V=\mathbb{F}^{n\times n}$ ותתי המרחבים W_1,W_2 שמוגדרים להיות קבוצת המטריצות המשולשיות העליונות/התחתונות מתקיים כי $V=W_1+W_2$ אבל $W_1\cap W_2\neq\{0\}$ (החיתוך הוא המטריצות האלכסוניות) ולכן הסכום $W_1+W_2=V$ אינו ישר.

(ג) במרחב $V=\mathbb{R}^n$, מצאו את החיתוך והסכום של $W_1=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\mid a_1=\cdots=a_n\right\}$ ו $W_2=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\mid\sum_{i=1}^n a_i=0\right\}$

(אין צורך להוכיח שאלו ת"מ).

פתרון:

- חיתוך: טענה: $W_1\cap W_2=\{0\}$ הוכחה: $0\in W_1\cap W_2$ כי זה ת"מ. נראה שזה הוקטור היחידי. אכן, יהא

$$v\in W_1\cap W_2$$

ונראה ש $v = 0$. נסמן $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ ומכיוון ש $v \in W_1$ מתקיים ש $a_1 = \cdots = a_n$ ולכן אפשר לסמן

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix}$$

מצד שני $v \in W_2$ ולכן $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ ולכן $\sum_{i=1}^n a_1 = 0$ אבל $\sum_{i=1}^n a_1 = na_1$ ולכן $na_1 = 0$ גורר $a_1 = 0$ ולכן

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

כמו שרצינו.

- **סכום:** $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^n$ (ולכן $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^n$ הוא סכום ישר). מספיק להראות ש $\mathbb{R}^n \subseteq W_1 + W_2$.
יהא $v \in \mathbb{R}^n$ וצריך למצוא $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ כך ש $v = w_1 + w_2$. נסמן

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

ונגדיר $\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}$ ונגדיר $w_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix} \in W_1$ ונגדיר $w_2 = v - w_1$ ואז ברור כי $v = w_1 + w_2$ **ולכן נותר להראות** כי

$$\begin{pmatrix} a_1 - \alpha \\ \vdots \\ a_n - \alpha \end{pmatrix} = w_2 \in W_2$$

אכן, הסכום

$$(a_1 - \alpha) + \cdots (a_n - \alpha) = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n \alpha = \sum_{i=1}^n a_i - n\alpha = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n a_i = 0$$

כדרש.

למשל ב $\mathbb{R}^3$ עבור $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ הגדרנו $\alpha = \frac{1+2+3}{3} = 2$ ואז

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ואז הגדרנו

$$w_2 = v - w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ובלי הפתעה (כי הוכחנו זאת) $w_2 \in W_2$.

באמת איך פותרים את זה? מסמנים

$$w_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix} \in W_1$$

ונמצא את α אח"כ. ממשיכים באותו אופן, מגדירים

$$w_2 = v - w_1 = \begin{pmatrix} a_1 - \alpha \\ \vdots \\ a_n - \alpha \end{pmatrix}$$

ונראה מה צריך להיות α על מנת ש $w_2 \in W_2$. מה נדרש? נדרש ש (כמו החישובים ממקודם)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - n\alpha = 0$$

ולכן

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

כמו שהגדרנו מראש.