תרגיל 2

1. יהיו R,S חוגים עם יחידה ו$\varphi : R \to S$ הומומורפיזם של חוגים עם יחידה. הוכיחו את הטענות הבאות:

   (א) לכל $x \in R$, $\varphi(-x) = -\varphi(x)$.

   (ב) אם $x \in R$ הפיך, אז $\varphi(x)$ הפיך, וכן $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$.

   (ג) אם $x \in R$ נלפוטנט, אז $\varphi(x)$ נלפוטנט.

   (ד) אם φ אפימורפיזם, אז $\varphi[Z(R)] \subseteq Z(S)$.

   פתרון:

   i. $0 = \varphi(0) = \varphi(x + (-x)) = \varphi(x) + \varphi(-x)$. לכן $\varphi(x) = -\varphi(x)$.

   ii. $1 = \varphi(1) = \varphi(x \cdot x^{-1}) = \varphi(x) \cdot \varphi(x^{-1})$. לכן $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$.

   iii. קיים n כך ש$x^n = 0$. $\varphi(x)^n = \varphi(x^n) = \varphi(0) = 0$.

   iv. יהי $x \in Z(R)$ ו$y \in S$. קיים $a \in R$ כך ש$y = \varphi(a)$. $\varphi(x)y = \varphi(x)\varphi(a) = \varphi(xa) = \varphi(ax) = \varphi(a)\varphi(x) = y\varphi(x)$.

2. נסמן $R = M_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.
   מצאו כמה הומומורפיזמים של חוגים $\psi\colon \mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}] \to R$ ישנם. רמז: הפתרון תלוי רק בתמונה $\psi(\sqrt[3]{2})$.
   פתרון:
   ראשית, $\psi(1) = 1$. מכאן שלכל $n \in \mathbb{Z}$, $\psi(n) = \begin{pmatrix} n \mod 2 & \\ & n \mod 2 \end{pmatrix}$. בפרט, $\psi(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. מכפליות, צריך להתקיים ש$\psi(\sqrt[3]{2})^3 = \psi((\sqrt[3]{2})^3) = \psi(2) = 0$.
   מבדיקה ידנית (בחוג יש בסה"כ 16 איברים) מגלים שהאיברים היחידים שמקיימי תנאי זה הם: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. לאחר שקובעים לאן כל איבר ב$\mathbb{Z}$ הולך ולאן $\sqrt[3]{2}$ הולך, כל שאר האיברים נקבעים אוטומטית ע"י כפליות וחיבוריות.
   לסיכום: יש 4 הומומורפיזמים.

3. יהיו $\{S, R_i\}_{i\in I}$ חוגים עם יחידה. תזכורת $\Pi_{i\in I} R_i = \{(a_i)_{i\in I} | \forall i \in I, a_i \in R_i\}$

   (א) נגדיר $\pi_i : \Pi_{i\in I} R_i \to R_i$ ע"י $\pi_i(a_j) = a_i$. (הטלה על הרכיב הi). הוכיחו שזהו אפימורפיזם.

   (ב) תהי $\varphi : S \to \Pi_{i\in I} R_i$ העתקה. הוכיחו שφ הומומורפיזם אמ"ם לכל i, $\pi_i \circ \varphi :$ $S \to R_i$ הומומורפיזם.

(ג) תנו דוגמא לשני חוגים עם יחידה, A,B כך שקיים הומומורפיזם של חוגים בלי יחידה $\varphi:A\to B$, ואין הומורפיזם של חוגים עם יחידה $\psi:A\to B$.
פתרון:

i. ראשית, נוכיח שההעתקה על: יהי $a\in R_i$. אפשר לקחת כמקור שלו את הוקטור שברכיב הi יש a, ובכל שאר הרכיבים יש 0.
נוכיח ש1 הולך ל1: איבר היחידה של המכפלה הוא הוקטור שבו בכל הרכיבים יש 1. לכן ההטלה שלו על כל רכיב היא 1.
ההטלה שומרת חיבור וכפל מכיוון שהפעולות בחוג המכפלה הן רכיב-רכיב.

ii. $\Longleftarrow$ הרכבה של הומומורפיזמים היא הומומורפיזם.
$\Longrightarrow$ נוכיח שφ הומו'. ראשית, בכל רכיב $\pi_i(\varphi(1))=1$. כלומר, $\varphi(1)$ הוא וקטור שבכל רכיב שווה ל1. לכן הוא איבר היחידה.
כעת, יהיו $a,b\in S$. $\varphi(a)=(a_i),\varphi(b)=(b_i),\varphi(ab)=(c_i),\varphi(a+b)=(d_i)$. לכל j, $\pi_j(\varphi(a))=a_j,\pi_j(\varphi(b))=b_j,\pi_j(\varphi(ab))=c_j\pi_j(\varphi(a+b))=d_j$. מכיוון ש$\pi_j\circ\varphi$ הומומורפיזם, מתקיים: $a_jb_j=c_j,a_j+b_j=d_j$.
מכיוון שהפעולות בחוג מכפלה הן רכיב רכיב, נקבל: $\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b),\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$.

iii. ראשית, נמצא שני חוגים S,R שאין בינהם הומומורפיזם של חוגים עם יחידה. ניתן לבחור למשל $R=\mathbb{Z}$, $S=\mathbb{Q}$. כל הומומורפיזם מS לR חייב להיות הומומורפיזם ה0. הסבר: 1 חייב ללכת ל0 או 1, כי הוא אידמפוטנט. אם 1 הולך ל0, אז זהו הומומורפיזם ה0. אחרת, $1\to 1$. ואז $2\to 2$. אבל איבר הפיך חייב ללכת לאיבר הפיך, לפי תרגיל 1. ואילו ב$\mathbb{Z}$ 2 אינו הפיך. כעת, נשים לב שבין כל שני חוגים קיים הומו' של חוגים בלי יחידה- הומו' ה0.

4. יהי R חוג. הוכיחו $I=\{f\in R[x]|f(212)=0\}\lhd R[x]$.
פתרון:

מלינארית 1 אתם יודעים שזה תת מרחב. נוכיח בליעה: יהיו $f\in I,g\in R[x]$. $(gf)(212)=g(212)f(212)=g(212)\cdot 0=0$. לכן $gf\in I$.

5. בכל סעיף, קבעו האם I אידיאל של R. במידה ולא, האם הוא אידאל ימני? שמאלי?

(א) $R=\mathbb{R}[x],I=\mathbb{R}_n[x]$ (כל הפולינומים עד דרגה n).

(ב) $R=M_2(\mathbb{Z}).I=\begin{pmatrix}2\mathbb{Z}&4\mathbb{Z}\\2\mathbb{Z}&4\mathbb{Z}\end{pmatrix}$

(ג) $R=\begin{pmatrix}*&*\\0&*\end{pmatrix},I=\begin{pmatrix}0&*\\0&0\end{pmatrix}$ (מטריצות משולשיות עליונות מעל חוג נתון)
פתרון:

i. לא אידיאל, ומכיוון שהחוג לא קומוטטיבי אז הוא גם לא אידיאל ימני/שמאליץ\.
הסיבה: אין "בליעה". למשל, $x^n\in I$, $x\in R$, אבל $x\cdot x^n=x^{n+1}\notin I$.

ii. קל לראות שזאת חבורה חיבורית. נוכיח שיש בליעה משמאל ולא מימין, ולכן זהו אידיאל שמאלי. $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2a'&4b'\\2c'&4d'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a'a+2bc'&4b'a+4b'd\\2a'c+2c'd&4b'c+4d'b\end{pmatrix}\in\begin{pmatrix}2\mathbb{Z}&4\mathbb{Z}\\2\mathbb{Z}&4\mathbb{Z}\end{pmatrix}=I$.

מצד שני, $\begin{pmatrix}2&4\\2&4\end{pmatrix}\in I$ ו$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\in R$, אבל $\begin{pmatrix}2&4\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\4&2\end{pmatrix}\notin I$.

iii. ראשית, קל לראות שI חבורה חיבורית. כעת נראה שיש בליעה משני הכיוונים. $\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&d\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&ad\\0&0\end{pmatrix}\in I$. $\begin{pmatrix}0&d\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&dc\\0&0\end{pmatrix}\in I$.

6. יהיו $\{R_i\}_{i\in I}$ חוגים עם יחידה.

(א) יהיו $I_i\trianglelefteq R_i$. הוכיחו: $\Pi I_i\trianglelefteq R_i$.

(ב) הוכיחו/הפריכו: כל אידיאל של המכפלה האינסופית ΠR_i הוא מהצורה ΠI_i עבור $I_i\trianglelefteq R_i$?

פתרון:

i. מתורת החבורות אנחנו כבר יודעים שמכפלה של חבורות היא חבורה, ולכן ΠI_i היא חבורה חיבורית. נוכיח בליעה. יהיו $(a_i)\in\Pi I_i,(x_i)\in\Pi R_i$. $(x_i)(a_i)=(x_ia_i)\in\Pi I_i$ בגלל שיש בליעה בכל רכיב. כנ"ל לגבי כפל מצד שני.

ii. הפרכה: נקח את I להיות אוסף כל הסדרות המתאפסות לבסוף. כלומר, פרט למס' סופי של מקומות, כל הרכיבים שווים ל0. קל לראות שזהו אכן אידיאל, והוא לא שווה למכפלה של אידיאלים.

7. תהי X קבוצה. הזכרו ש-$(P(X),\triangle,\cap)$ הוא חוג חילופי. תהי $\varnothing\neq I\subseteq P(X)$ תת־קבוצה לא ריקה.

(א) נאמר ש-τ סגורה לאיחוד אם $A,B\in I$ גורר $A\cup B\in\tau$. נאמר ש-τ סגורה להכלה אם $A\subseteq B\in\tau$ גורר $A\in I$. הוכיחו כי τ אידאל אם ורק אם I סגורה לאיחוד והכלה.

(ב) נניח ש-X סופית. הוכיחו ש-I אידאל אם רק אם קיים $C\subseteq X$ כך ש-$\tau=P(C)$.

(ג) מצאו אידאל I של $(P(\mathbb{N}),\triangle,\cap)$ שאינו מן הצורה $P(C)$.

פתרון:

i. ראשית, נניח שI אידיאל. יהי $B\in I$ ו$A\subseteq B$. אזי $A=A\cap B\in I$, כי I מקיים "בליעה".
כעת, יהיו $A,B\in I$. הוכחנו כבר סגירות להכלה, ולכן $B\setminus A\in I$. I הוא אידיאל ולכן סגור לחיבור. מכאן ש$A\cup B=A\triangle(B\setminus A)\in I$. מש"ל.
לכיוון השני, נניח שI מקיים סגירות לאיחוד והכלה. נוכיח שI אידיאל. ראשית, מסגירות להכלה, ברור ש$\emptyset\in I$. כמו כן, לכלל איבר בI, גם הנגדי שלו בI, כי כל איבר הוא הנגדי של עצמו. יהיו $A,B\in I$. מסגירות לאיחוד, $A\cup B\in I$. מסגירות להכלה $A\triangle B\subseteq A\cup B$ ולכן $A\triangle B\in I$. כלומר, הוכחנו שI חבורה חיבורית. כעת נוכיח בליעה. יהיו $A\in I, B\in P(X)$. $B\cap A\subseteq A$ ולכן מסגירות להכלה, $B\cap A\in I$. מש"ל.

ii. ראשית, ברור שלכל $C\subseteq X$, $P(C)$ סגורה לאיחוד והכלה ולכן אידיאל. כעת, יהי $I\trianglelefteq P(X)$. בI יש מס' סופי של איברים כי $P(X)$ סופית. נסמן בC את איחוד כל הקבוצות בI. $C\in I$, כי באינדוקציה ניתן להראות שI סגור לכל מס'

סופי של איחודים. מהגדרת C, ברור שכל איבר בI מוכל בC, ולכן $I \subseteq P(C)$.
מצד שני, I סגור להכלות, ולכן $P(C) \subseteq I$. מש"ל.

iii. ניקח את I להיות האוסף של כל תת הקבוצות הסופיות של $\mathbb{N}$. קל לראות שהוא סגור לאיחוד והכלה, ולכן אידאל. כמו כן, קל לראות שהוא לא שווה לקבוצת החזקה של שום קבוצה.

8. יהי R חוג ו$I, J \trianglelefteq R$. הוכיחו: $I \cup J \trianglelefteq R$ אמ"ם $I \subseteq J \vee J \subseteq I$.

פתרון:

נניח בשלילה ש $I \cup J$ אידיאל, וגם $I \not\subseteq J \wedge J \subsetneq I$. לכן קיימים $x \in I \setminus J, y \in J \setminus I$.
$I \cup J$ אידאל, ולכן $x + y \in I \cup J$. אם $x + y \in I$, אז $y = (x + y) - y \in I$. סתירה.
המקרה השני זהה.