מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 5

1. תהא X קבוצה כלשהי. תהא τ קבוצת תת-קבוצות
כך ש- $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X \mid |U^c| \leq \aleph_0\}$.
הוכיחו ש- τ טופולוגיה.
(<u>הערה</u>. המשמעות של אי שוויון $|A| \leq \aleph_0$: A היא קבוצה בת מניה או סופית).

2. יהי X מרחב מטרי ו- $Y = \{x \in X \mid d(a_1, x\} = d(a_2, x)\}$.
הוכיחו ש-Y קבוצה סגורה .

<u>תזכורת.</u>

<u>הגדרה</u>. תהא A תת-קבוצה במרחב טופולוגי X. תת-קבוצה

$$Cl(A) = \bigcap_{\substack{A \subseteq F \subseteq X \\ F \text{ סגורה}}} F$$

נקראת <u>*סגור של* A</u>.

<u>הגדרה</u>. תהא A תת-קבוצה במרחב טופולוגי X. תת-קבוצה

$$Int(A) = \bigcup_{\substack{U \subseteq A \subseteq X \\ U \text{ פתוחה}}} U$$

נקראת <u>*פנים של* A</u>.

<u>כמה תכונות בסיסיות של סגור ופנים:</u>

(a) $A \subseteq Cl(A)$

(b) $A \subseteq B \Rightarrow Cl(A) \subseteq Cl(B)$

(c) $Cl(A)$ קבוצה סגורה

(d) $Cl\big(Cl(A)\big) = Cl(A)$

(e) A סגורה $\Leftrightarrow Cl(A) = A$ -

(*f*) נקודה p שייכת ל- $Cl(A)$ א"א כל סביבה של p נחתכת עם A.

(g) $Int(A)$ קבוצה פתוחה.
(h) $Int(A)$ היא קבוצה של כל הנקודות הפנימיות ב-A .

3. א' הוכיחו אותן התכונות מ- (a)-(h), שלא הוכחו בארצאה.
ב' תהא A תת-קבוצה במרחב טופולוגי .הוכיחו: $Int(A) = \left(Cl(A^c)\right)^c$.
ג' תהא A תת-קבוצה במרחב טופולוגי .הוכיחו ש- $Cl(A) - Int(A)$ קבוצה סגורה.

4. תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה בת מניה. קבעו מה היא הקבוצה $Int\ (A)$?
(טופולוגיה ב-$\mathbb{R}$ רגילה)

5. הוכיחו ש- $\mathbb{Q}$ ו- $\mathbb{Q}^c$ צפופות ב-$\mathbb{R}$.
(טופולוגיה ב-$\mathbb{R}$ רגילה, $\mathbb{Q}$ - קבוצת מספרים רציונליים).

6. יהיו X מרחב טופולוגי ו-M מרחב מטרי.
תהא תת-קבוצה $A \subseteq X$ צפופה ב-X ויהיו $f, g\colon X \to M$ שתי פונקציות רציפות כך ש- $f|_A = g|_A$.
הוכיחו ש- $f = g$.