גבול של סדרה ①

<u>הגדרה</u>: פורמלית, סדרה של מספרים ממשיים היא פונקציה $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, לכל $n \in \mathbb{N}$ הוא מתאים מספר ממשי a_n שנקרא האיבר ה-n-י של הסדרה.

סדרה זו רשימה אינסופית מסודרת של מספרים ממשיים: $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$

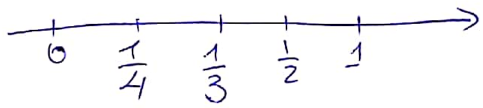
<u>סימון</u>: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

<u>3 דוגמאות</u>:

1. הסדרה ההרמונית $a_n = \frac{1}{n}$

זו הסדרה הבאה:

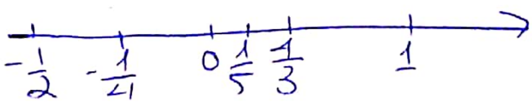
$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$



2. הסדרה הרמונית המתחלפת:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$



3. סדרה קבועה: $a_n = a \in \mathbb{R}$

$a, a, a, \ldots$

2) 4) - סדרה - הנדסית:

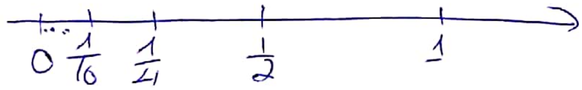
$$a_n = a \cdot q^{n-1}$$

q - המנה של הסדרה

a - האיבר הראשון של הסדרה

לדוגמה $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\quad a = 1$, $q = \frac{1}{2}$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \ldots$



5. סדרה חשבונית

$$a_n = a + d(n-1)$$

d = (דרא) ההפרש הקבוע של הסדרה

a = האיבר הראשון.

לדוגמה $a_n = 5 + 3(n-1)$

$5, 8, 11, 14, \ldots$

הערה: שני סדרות עשויות להכיל את אותם המספרים אך בכל זאת להיות שונות אחת מהשנייה בגלל ההבדל בסדר שבו המספרים מופיעים.

לדוגמה: הסדרה (a_n)

$3, 8, 3, 8, 3, 8, \ldots$

והסדרה (b_n)

$8, 3, 8, 3, 8, 3, \ldots$

הן שונות, למרות שמכילות את אותם המספרים.

③ לכן כדי ש $(a_n)=(b_n)$ (נדרש)

$$\forall n\in\mathbb{N}: a_n=b_n$$

כלומר כל האיברים במקומות המתאימים

והן זהים.

⑥ לפעמים זה בלתי אפשרי למצוא נוסחה אלגברית עבור סדרה (למשל נוסחה אלגברית

עדיין עבור הסדרה ההרמונית $(a_n=\frac{1}{n}$

לכן נסתפק ב-תיאור כללי של סדרה.

למשל הסדרה: $1, -2, 100, -57, 0, \dots$

נראית ללא חוקיות מסויימת.

$\boxed{\text{הגדרת הגבול}}$

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה (אינ').

נאמר שהמספר L הוא הגבול של הסדרה (a_n)

אם לכל $\varepsilon>0$ (קטן ככל שיהיה)

ק"מ מספר טבעי n_0 כך שמתקיים $\forall n>n_0$

$$|a_n-L|<\varepsilon$$

$\boxed{\text{הערה:}}$ n_0 תלוי ב- ε

$\boxed{\text{פורמלית:}}$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n>n_0: |a_n-L|<\varepsilon$$

$\boxed{\text{הסבר מילולי}}$

ε - מסמל מרחק מ- L.

לכן ~~לכל~~ L הוא הגבול של סדרה אם לכל $\varepsilon>0$ ק"מ מקום בסדרה n_0 כך שהחל ממנו ($n>n_0$) כל איברי הסדרה יהיו בתוך הקטע $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

כלומר (4)

$$L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$$
$$\Downarrow$$
$$|a_n - L| < \varepsilon$$

$\boxed{\text{אינטואיציה}}$

כל האיברים של סדרה הולכים ומתקרבים סביב המספר L, ככל ש-n הולך וגדל המרחק בין a_n ל-L הולך וקטן.

__תרגילים__

1. מצא $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n}$ אם קיים והוכח.

__פתרון:__ מה-אינטואיציה של סדרה ננחש שהגבול הוא 1.

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \quad 1$$

ונוכיח שזה נכון לפי הגדרה.

__צ"ל:__ $\forall \varepsilon>0 \; \exists n_0\in\mathbb{N} \; \forall n>n_0:$

$$(*) \left|\frac{n-1}{n} - 1\right| < \varepsilon$$

__מטרה:__ לכל $\varepsilon>0$ נרצה למצוא את n_0 המתאים.

__פתרון:__

$$\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \left|\frac{n-1-n}{n}\right| = \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \overset{?}{<} \varepsilon$$
$$\Downarrow$$

אנו שואלים עבור אילו n האי שוויון מתקיים

האי שוויון מתקיים $\Longleftarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$.

ונבחר $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \geq \frac{1}{\varepsilon}$

(5) נשארנו שלכל n_0 שבחרנו הא' שוויון (*) יתקיים:

$$\left|\frac{n-1}{n}-1\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} = \frac{1}{\lceil\frac{1}{\varepsilon}\rceil} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

ראינו   כי $n>n_0$ בחרנו את n_0

$\boxed{\text{סוף הוכחה}}$

(2). הוכח לפי ההגדרה ש

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n-1}{3n^2+2n+1}=\frac{1}{3}$$

פתרון: כאן כבר נתון ש-$\frac{1}{3}$ הוא הגבול ונשאר להוכיח לפי ההגדרה.

צ"ל:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n>n_0: \left|\frac{n^2-n-1}{3n^2+2n+1}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$$

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$, ונחפש n_0 שמקיים את תנאי בהגדרת הגבול.

$$\left|\frac{n^2-n-1}{3n^2+2n+1}-\frac{1}{3}\right| = \left|\frac{\cancel{3n^2}-3n-3-\cancel{3n^2}-2n-1}{3(3n^2+2n+1)}\right| =$$

מכנה משותף

כאשר $n\geq4$

$$= \left|\frac{-5n-4}{3(3n^2+2n+1)}\right| = \frac{5n+4}{3(3n^2+2n+1)} < \frac{5n+4}{3\cdot3n^2} \leq \frac{5n+n}{9n^2} = \frac{6n}{9n^2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n}$$

הקטנו מכנה: הגדלנו ביטוי

סה"כ קיבלנו:

$$\left|\frac{n^2-n-1}{3n^2+2n+1}-\frac{1}{3}\right| < \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n} \overset{?}{<} \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{אנו שואלים עבור אילו } n \text{ האי שוויון יתקיים}}$$

האי שוויון מתקיים $\Longleftrightarrow$ $n > \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\varepsilon}$

(נבחר $n_0 = \left\lceil \frac{2}{3\varepsilon} \right\rceil \geq \frac{2}{3\varepsilon}$ וגם $n \geq 4$ $\left(\max\{n_0, 4\}\right)$

* (נשאר לנו ש-n_0 שבחרנו הוא מקי"ם את התנאים.

לכל ε קי"ם $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש $\forall n > n_0$ מתקי"ם:

$$\left|\frac{n^2-n-1}{3n^2+2n+1}-\frac{1}{3}\right| = \frac{5n+4}{3(3n^2+2n+1)} < \frac{5n+4}{9n^2} <$$

$$< \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n} \underset{\Uparrow}{<} \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n_0} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\left\lceil\frac{2}{3\varepsilon}\right\rceil} \underset{\Uparrow}{\leq} \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\frac{2}{3\varepsilon}} = \varepsilon$$

כי $n > n_0$ כי $\left\lceil\frac{2}{3\varepsilon}\right\rceil \geq \frac{2}{3\varepsilon}$

הערה: כאשר חיפשנו את n_0 המתאים הקטנו את הביטוי.
המטרה של השאלה היא לפשט את הביטוי כך שנוכל בקלות למצוא את הקשר בין n ל-ε.

7

3. הוכח

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{4^n} = 0$$

פתרון:

צ"ל:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n>n_0: \left|\frac{n}{4^n}-0\right| < \varepsilon$$

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$, נחפש $n_0\in\mathbb{N}$ שמתקיים את התנאים.

$$\left|\frac{n}{4^n}\right| = \frac{n}{4^n} \underset{\Uparrow}{<} \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \overset{?}{<} \varepsilon$$

$$\text{כי } \forall n\in\mathbb{N}: 4^n \geq n^2 \qquad\qquad \Updownarrow\ \ n > \frac{1}{\varepsilon}$$

כלומר אם נשוין ומד"ם $\Longleftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

~~ו~~ ונבחר $\frac{1}{\varepsilon} \geq \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil = n_0$.

ונראה שעבור n_0 אשר בחרנו התנאי להגדרת הגבול מתקיים.

לכל $\varepsilon>0$ ד"ם $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ המקיים לכל $n>n_0$:

$$\left|\frac{n}{4^n}-0\right| = \frac{n}{4^n} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \underset{\Uparrow}{<} \frac{1}{n_0} \leq \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{\varepsilon}\right\rceil} \leq \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

כי $n>n_0$

סיימנו.

Scanned by CamScanner