פתרונות לתרגיל בית מספר 6

שאלה 6.5

א. אין שוויון. ננסה לראות האם כל וקטור ב-$\mathbb{R}^3$ ניתן להצגה כצ"ל של הוקטורים הנתונים.

נניח $\alpha(2,0,4)+\beta(0,1,0)+\gamma(6,5,12)=(x,y,z)$. לאחר שנציב במטריצה $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 6 & x \\ 0 & 1 & 5 & y \\ 4 & 0 & 12 & z \end{array}\right)$ ונדרג נקבל צורה מדורגת $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 6 & x \\ 0 & 1 & 5 & y \\ 0 & 0 & 0 & z-2x \end{array}\right)$. אם $z \neq 2x$ אין פתרון למערכת. לכן, הוקטור $(0,0,1)$ למשל לא מתקבל כצירוף ליניארי של הוקטורים הנתונים.

<u>הסבר נוסף בשימוש מימד</u>: ידוע שהמימד של $\mathbb{R}^3$ הוא 3 ולכן שלושה וקטורים פורשים את המרחב אם ורק אם הם בת"ל. אך הוקטורים הנתונים תלויים: $(6,5,12)=3(2,0,4)+5(0,1,0)$ ולכן קבוצה זו לא פורשת את $\mathbb{R}^3$.

ב. נבדוק האם ניתן לבטא כל פולינום כצ"ל של ארבעת הפולינומים הנתונים. $\alpha\cdot 1+\beta\left(x+x^2\right)+\gamma\left(4x^3+x^2\right)+\delta\cdot 2x=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$. אם נשווה מקדמים נקבל

$$a_0=\alpha, a_1=\beta+2\delta, a_2=\beta+\gamma, a_3=4\gamma \Rightarrow$$

$$\alpha=a_0, \gamma=\frac{a_3}{4}, \beta=a_2-\frac{a_3}{4}, \delta=a_1-\frac{\beta}{2}=a_1-\frac{\left(a_2-\frac{a_3}{4}\right)}{2}$$

כלומר כל פולינום ממעלה ≤ 3 הוא צירוף ליניארי של 4 הפולינומים הנתונים ומכאן יש שוויון.

<u>הסבר נוסף</u>: המימד של $\mathbb{R}_3[x]$ הוא 4 וארבעת הוקטורים הנתונים אינם תלויים ליניארית (יש לבדוק זאת) ולכן הם פורשים את $\mathbb{R}_3[x]$.

ג. ניתן לראות כי 4 המטריצות הן סימטריות, לכן הן פורשות רק את תת מרחב המטריצות סימטריות, ולכן קבוצה זו לא פורשת את $F^{2\times 2}$. כל מטריצה שאינה סימטרית לא נמצאת בנפרש, למשל $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>שאלה 7.10</u>

א. המטריצות תלויות ליניארית:.

נענה על השאלה המקבילה על הקואורדינטות לפי הבסיס הסטנדרטי האם הקבוצה

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\7\\1\\3\\2\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\\0\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\34\\7\\12\\8\\35\end{pmatrix}\right\}$$

בת"ל. נשים את הוקטורים בשורות ונבדוק.

$$\begin{pmatrix}1 & 34 & 7 & 12 & 8 & 35\\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 5\\ 1 & 7 & 1 & 3 & 2 & 5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 34 & 7 & 12 & 8 & 35\\ 0 & 36 & 8 & 12 & 8 & 40\\ 0 & -27 & -6 & -9 & -6 & -30\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 34 & 7 & 12 & 8 & 35\\ 0 & 9 & 2 & 3 & 2 & 10\\ 0 & 9 & 2 & 3 & 2 & 10\end{pmatrix}$$

קל לראות שמימד מרחב השורות הוא 2, לכן השורות המקוריות תלויות לינארית ולכן המטריצות תלויות לינארית.

ב. כל 2 מטריצות מבין ה-3 מהוות בסיס למרחב שנפרש ע"י שלושתן. (כי כל 2 בת"ל ולכן לפי השלישי חינם מהוות בסיס).

<u>שאלה 7.29</u>

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 6 & -6\\ 1 & 1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 2 & -3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -3\\ 0 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, spanU=C(A)=span\{(1,-1,2,-3),(0,2,0,3)\}$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 3\end{pmatrix}, spanV=C(B)=span\{(1,0,1,0),(0,-2,0,3)\}$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -3\\ 0 & 2 & 0 & 3\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{pmatrix}, U+V=C(C)=\mathbb{R}^4$$

קל לראות לפי משפט המימדים שהחיתוך חייב להיות אפס, ובסיסו הקבוצה הריקה.

שאלה 7.32

ניתן לראות כי ווקטור הנפרש גם על ידי U וגם על ידי V הוא מהצורה $\begin{pmatrix} d & e \\ \bar{e} & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \bar{b} \end{pmatrix}$ לכן

בהכרח $a = d, \bar{e} = 0, e = b, f = \bar{b}$. קל לראות שהכל מתאפס פרט ל $a = d$ לכן החיתוך הוא

$U \cap V = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in C \right\}$.

אנו רוצים את הבסיס מעל $\mathbb{R}$ והוא $\left\{ \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. קל לראות שקבוצה זו פורשת את

החיתוך ובת"ל מעל $\mathbb{R}$ (אין צירוף לינארי לא טריוויאלי של $1, i$ עם מקדמים ממשיים שמתאפס).

שאלות נוספות מהקובץ:

1.

a. יהיו $v_1 = (1,0,1,0), v_2 = (0,2,1,1), v_3 = (1,2,1,2)$ ויהיה $u = (x,y,z,w)$. מצא תנאים על x,y,z,w (מערכת משוואות לינאריות) כך ש u יהיה שייך ל Span של v_1, v_2, v_3.

פתרון:

באופן כללי, $b \in Span\{v_1, v_2, v_3\}$ אם ורק אם קיים פתרון למערכת $Ax = b$ עבור $A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$ (מטריצה שעמודותיה הן $\{v_1, v_2, v_3\}$). זאת מכיוון ש Ax הוא צירוף לינארי של עמודות A עם הסקלרים מהווקטור x.

נבדוק מתי יש למערכת הנ"ל פתרון (נסתכל על התרגיל כמערכת פרמטרית עם 4 פרמטרים).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 2 & 2 & y \\ 1 & 1 & 2 & 1 & z \\ & -1 & 1 & 2 & w \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 2 & y \\ 0 & 1 & 1 & z-x \\ 0 & 2 & 2 & w+x \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & y-2z+2x \\ 0 & 1 & 1 & z-x \\ 0 & 0 & 0 & w+x-2z+2x \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & z-x \\ 0 & 0 & 0 & y-2z+2x \\ 0 & 0 & 0 & w-2z+3x \end{array}\right)$$

ולכן יש פתרון למערכת אם ורק אם מתקיימות 2 המשוואות $y - 2z + 2x = 0$ ו $w - 2z + 3x = 0$ (אחרת יש שורת סתירה).

b. פתור את מערכת המשוואות שמצאת בסעיף א' על מנת לקבל וקטור כללי ב $Span\{v_1,v_2,v_3\}$ (הוא וקטור הפתרון הכללי כמובן).

פתרון:

קיבלנו את המערכת ההומוגנית $\begin{cases} y-2z+2x=0 \\ w-2z+3x=0 \end{cases}$ נפתור אותה:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right)$$

ולכן הפתרון למערכת הוא מהצורה $b=(\frac{2}{3}t+\frac{4}{3}s,\frac{2}{3}t+\frac{2}{3}s,t,s)$ כלומר וקטור ששייך ל $Span\{v_1,v_2,v_3\}$ הוא מהצורה הנ"ל. ולכן

$$Span\{v_1,v_2,v_3\}=\left\{(\frac{2}{3}t+\frac{4}{3}s,\frac{2}{3}t+\frac{2}{3}s,t,s)\mid s,t\in\mathbb{R}\right\}$$

נחשב בסיס (אפילו שזה לא חלק מהשאלה):

$b=\frac{1}{3}(2t+4s,2t+2s,3t,3s)=\frac{t}{3}(2,2,3,0)+\frac{s}{3}(4,2,0,3)$ כלומר כל וקטור בspan הוא צירוף לינארי של $\{(2,2,3,0),(4,2,0,3)\}$. קל לראות שוקטורים אלה הם בת"ל מכיוון שצירוף לינארי שלהם שמתאפס מכריח $t=s=0$. לכן זו קבוצה פורשת ובת"ל כלומר בסיס.

c. מצא מערכת משוואות דומה לסעיף א' עבור

$$w_1=(1,1,0,0), w_2=(0,1,1,0), w_3=(0,0,1,1)$$

פתרון:

נפתור מערכת פרמטרית כמו בסעיף א':

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & w \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y-x \\ 0 & 1 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & w \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & 1 & z-y+x \\ 0 & 0 & 1 & w \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & 1 & z-y+x \\ 0 & 0 & 0 & w-z+y-x \end{array}\right)$$

לכן מערכת המשוואות הינה המשוואה $w-z+y-x=0$

d. נסמן $V=span\{v_1,v_2,v_3\}, W=span\{w_1,w_2,w_3\}$ עבור הוקטורים מהסעיפים הקודמים. הוכח: $u\in V\cap W$ אם"ם u מקיים את מערכת המשוואות שמכילה את כל המשוואות מסעיף א' **וגם** מסעיף ג'.

הוכחה:

$u\in V\cap W$ אם"ם $u\in V$ וגם $u\in W$ אם"ם הוא מקיים את מערכת המשוואות מסעיף א' וגם את מערכת המשוואות מסעיף ג' (הרי הראנו שוקטור הוא פתרון של מערכת המשוואות אם"ם הוא נמצא בspan) אם"ם הוא מקיים את המערכת שמכילה את כל המשוואות.

e. מצא בסיס ל $V\cap W$ באמצעות פתרון המערכת מהסעיף הקודם.

פתרון:

וקטור בחיתוך הוא וקטור שמקיים את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} y-2z+2x=0 \\ w-2z+3x=0 \\ w-z+y-x=0 \end{cases}$$

נמצא בסיס למרחב הפתרונות של המערכת (הרי הוא שווה ל $V\cap W$ לפי הסעיף הקודם).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון כללי למערכת הוא מהצורה $(t,2t,2t,t)$ ולכן בסיס לחיתוך הוא $(1,2,2,1)$

הערה: התרגיל הזה הוא כמובן דוגמא פרטית לאלגוריתם כללי לחשב בסיס לחיתוך.

2. יהא מ"ו V ויהיו $A,B\subseteq V$ שתי קבוצות הוכח/הפרך:

a. $A=Span(A)$ אם"ם A תת מרחב וקטורי

הוכחה: נניח $A=Span(A)$ אזי ברור ש A תת מרחב וקטורי כי $Span$ תמיד מרחב וקטורי (אוסף כל הצירופים הלינארים תמיד סגור לחיבור וכפל בסקלר).

בכיוון ההפוך, נניח ש A מרחב וקטורי, אזי הוא סגור לחיבור וכפל בסקלר ולכן הוא סגור לצירופים לינאריים ולכן $Span(A)\subseteq A$. מצד שני, אם $a\in A$ אזי $a=1\cdot a$ וזה צירוף לינארי של איברי a ולכן $a\in Span(A)$ כלומר $A\subseteq Span(A)$. ביחד קיבלנו $A=Span(A)$ (הכלה דו כיוונית).

b. $Span(A\cap B)=Span(A)\cap Span(B)$

הפרכה: אמנם החיתוך של תתי מרחב הוא תמיד תת מרחב, אך השיוויון הנ"ל לא חייב להתקיים.
ניקח $A=\{(1,0),(0,1)\}, B=\{(2,0),(0,1)\}$. $Span(A)=Span(B)=\mathbb{R}^2$. אבל $A\cap B=\{(0,1)\}$ ולכן $Span(A\cap B)=\{(0,a)\,|\,a\in\mathbb{R}\}\neq\mathbb{R}^2$.

c. $Span(A\cup B)=Span(A)\cup Span(B)$

הפרכה: זה כמעט אף פעם לא נכון. איחוד של תתי מרחבים הוא לא תת מרחב, אלא אם אחד מתתי המרחבים מוכל בשני. דוגמא נגדית: $A=\{(1,0)\}, B=\{(0,1)\}$, $A\cup B=\{(1,0),(0,1)\}$ ולכן $Span(A\cup B)=\mathbb{R}^2$. אבל $Span(A)\cup Span(B)=\{(a,0)\,|\,a\in\mathbb{R}\}\cup\{(0,a)\,|\,a\in\mathbb{R}\}$ וזה בוודאי שונה מ $\mathbb{R}^2$ [כי למשל $(1,2)\notin\{(a,0)\,|\,a\in\mathbb{R}\}\cup\{(0,a)\,|\,a\in\mathbb{R}\}$].

d. אם $A\subseteq B$ אזי $Span(A)\subseteq Span(B)$

הוכחה: נניח $v\in Span(A)$ לכן $v=a_1v_1+\ldots+a_nv_n$ כך ש $v_1,\ldots,v_n\in A$ אבל $A\subseteq B$ ולכן $v_1,\ldots,v_n\in B$ ולכן $v\in Span(B)$ ולכן $Span(A)\subseteq Span(B)$.

e. אם $Span(A)=Span(B)$ אזי $A\subseteq B$ או $B\subseteq A$

הפרכה: ניקח $A=\{(1,0),(0,1)\}, B=\{(2,0),(0,1)\}$ אזי $Span(A)=Span(B)=\mathbb{R}^2$ אבל אף קבוצה לא מוכלת בשנייה.

f. אם $Span(A)=V$ אזי $B\subseteq A$

הפרכה: ניקח $V=\mathbb{R}^2$, $B=\{(2,0),(0,1)\}$, $A=\{(1,0),(0,1)\}$. ושוב

$Span(A)=Span(B)=\mathbb{R}^2$ אבל $B\not\subset A$

3.

a. יהיו $p_1=1+x+x^2+x^3, p_2=x^2-1, p_3=1-x+x^2-x^3$ פולינומים, ויהי

$p_4=1+x^2+2x^3$. האם $p_4\in Span\{p_1,p_2,p_3\}$?

פתרון: נעביר לצורה וקטורית: $v_1=(1,1,1,1), v_2=(-1,0,1,0), v_3=(1,-1,1,-1), v_4=(1,0,1,2)$

נבדוק האם למערכת הבאה יש פתרון $\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\1&0&-1&0\\1&1&1&1\\0&0&0&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\1&0&-1&0\\1&1&1&1\\1&0&-1&2\end{array}\right)$ יש שורת סתירה,

ולכן $p_4\notin Span\{p_1,p_2,p_3\}$

b. האם $\{p_1,p_2,p_3\}$ מהסעיף הקודם בת"ל?

פתרון:

למדנו ש Ax הוא צירוף לינארי של עמודות המטריצה A עם הסקלרים מהוקטור x. לכן, עמודות A הינן בת"ל אם"ם הצירוף הלינארי היחיד שלהן שמתאפס הוא הטריוויאלי אם"ם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש רק את הפתרון היחיד $x=0$

$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&1&-2&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\1&0&-1&0\\1&1&1&0\\1&0&-1&0\end{array}\right)$ ולכן יש פתרון יחיד למערכת ולכן הפולינומים בת"ל.

c. האם $\{p_1,p_2,p_3,p_4\}$ מהסעיף הראשון בת"ל?

פתרון: $\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\0&1&-2&-1\\0&0&4&2\\0&0&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\1&0&-1&0\\1&1&1&1\\1&0&-1&2\end{pmatrix}$ ולכן למערכת ההומוגנית אין פתרון ולכן הם בת"ל.

d. יהא V מ"ו כלשהוא, ויהיו $v_1,...,v_n \in V$ וקטורים בת"ל, ויהיה וקטור u כך ש $u \notin Span\{v_1,...,v_n\}$. הוכח/הפרך: $v_1,...,v_n,u$ בת"ל.

הוכחה:

נניח בשלילה ש $v_1,...,v_n,u$ ת"ל, לכן קיים צירוף ליניארי לא טריוויאלי של $v_1,...,v_n,u$ שמתאפס:

$a_1v_1+...+a_nv_n+a_{n+1}u=0$ וקיים $1\le j\le n+1$ כך ש $a_j\ne 0$. נניח בשלילה ש $a_{n+1}=0$ אזי

$a_1v_1+...+a_nv_n+0\cdot u=0$ ובוודאי $j\ne n+1$. ולכן קיים $1\le j\le n$ כך ש $a_j\ne 0$ אבל אז יש צירוף

ליניארי לא טריוויאלי של $v_1,...,v_n$ שמתאפס - $a_1v_1+...+a_nv_n=0$ בסתירה לכך ש $v_1,...,v_n$ בת"ל.

לכן בהכרח $a_{n+1}\ne 0$ ולכן $a_1v_1+...+a_nv_n=-a_{n+1}u$ נחלק ב $-a_{n+1}$ (מותר כי זה שונה מאפס)

ונקבל $\frac{a_1}{-a_{n+1}}v_1+...+\frac{a_n}{-a_{n+1}}v_n=u$ כלומר u הינו צירוף ליניארי של $v_1,...,v_n$ ולכן

$u\in Span\{v_1,...,v_n\}$ בסתירה לנתון.

הסתירה מוכיחה את הטענה, ש $v_1,...,v_n,u$ בת"ל.

4. יהי $\mathbb{R}_3[x]$ מרחב הפולינומים מדרגה קטנה או שווה ל3. יהיו בסיסים סדורים

$B=\{1,1+x,1+x^2,1+x^3\}, C=\{1+x,1-x,x^2-x^3,x^2+x^3\}$ (הסדר משמאל לימין)

a. מצא את $p(0)$ אם נתון $[p]_B=\begin{pmatrix} a \\ b \\ a-b \\ -2a \end{pmatrix}$

פתרון:

$p=a\cdot 1+b\cdot(1+x)+(a-b)\cdot(1+x^2)-2a\cdot(1+x^3)$ לכן $p(0)=0$

b. מצא את $\left[5+x-7x^2+2x^3\right]_B ,\left[5+x-7x^2+2x^3\right]_C$

פתרון: (בעזרת התוצאות מסעיף אחרון)

$$\left[5+x-7x^2+2x^3\right]_B=[I]_B^S\begin{pmatrix}5\\1\\-7\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\1\\-7\\2\end{pmatrix}$$

$$\left[5+x-7x^2+2x^3\right]_C=[I]_C^B\begin{pmatrix}9\\1\\-7\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6\\4\\-9\\-5\end{pmatrix}$$

c. מצא את $\left[1+x^2\right]_C$

פתרון:

נבחין כי סכום איברי הבסיס C שווה ל $2+2x^2$ ולכן $\left[1+x^2\right]_C=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

d. מצא את מטריצות המעבר $[I]_C^B, [I]_B^C$

פתרון:

$$[I]_S^B=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},[I]_B^S=\left([I]_S^B\right)^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$[I]_S^C=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&-1&1\end{bmatrix},[I]_B^C=[I]_B^S[I]_S^C=\begin{bmatrix}0&2&0&-2\\1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$[I]_C^B=\left([I]_B^C\right)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&2&1&1\\1&0&1&1\\0&0&1&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

5. *יהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מרחב הפונקציות. הוכיחו כי לא קיים למרחב זה בסיס סופי (תניחו בשלילה, אל תחפשו בסיס אינסופי)

הוכחה:

נניח $f_1,\dots,f_n$ מהוות בסיס למרחב הפונקציות. נבחר n נקודות שונות **כלשהן** $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$.

נביט ב-n הוקטורים $\left(f_i(x_1),\dots,f_i(x_n)\right)\in\mathbb{R}^n$. מכיוון ש $f_1,\dots,f_n$ פורשות את כל מרחב הפונקציה, הוקטורים הללו בוודאי פורשים את $\mathbb{R}^n$, ולכן לפי השלישי חינם הם מהווים בסיס ל- $\mathbb{R}^n$.

לכן לכל וקטור ב- $\mathbb{R}^n$ יש הצגה **יחידה** כצירוף ליניארי של $\left\{\left(f_i(x_1),\dots,f_i(x_n)\right)\right\}$. מכאן נובע שכל שתי פונקציות g,h השוות על $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$ שווֹת בכל נקודה, וזה כמובן אבסורד.