83-110 אלגברה לינארית להנדסה – פתרון מועד א' תש"ף

מרצים: דר' שפרה רייף, דר' ארז שיינר

אורך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

הוראות: יש לענות על **כל** 5 השאלות, יש לנמק ולהוכיח היטב כל טענה.

יש לכתוב את התשובה לכל שאלה על טופס המבחן, מיד לאחר השאלה.

כל שאלה שווה 22 נק' סה"כ הניקוד המקסימלי 110 נק' (כל ציון מעל 100 יעוגל ל100).

1. תהיינה מטריצות ריבועיות $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $C(A)=R(A)$ אזי A הפיכה.

הפרכה: עבור מטריצת האפס $A=0$ מתקיים כי $C(A)=R(A)=\{0\}$ אך היא כמובן אינה הפיכה.

ב. אם $C(A)\subseteq R(A)$ אזי $C(A)=R(A)$.

הוכחה: ידוע לנו ממשפט הדרגה כי $dimC(A)=dimR(A)$ ביחד עם ההכלה $C(A)\subseteq R(A)$ יש לנו הכלה חד כיוונית ושיוויון מימדים ולכן אכן $C(A)=R(A)$

ג. $N(AB)\subseteq N(A)$.

הפרכה: נבחר $B=0$ ולכן $N(AB)=N(0)=\mathbb{R}^n$. נבחר בנוסף $A=I$ ולכן $N(A)=N(I)=\{0\}$ וסה"כ כמובן $N(AB)\not\subseteq N(A)$.

2. תהי מטריצה ריבועית $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

א. הוכיחו שאם λ הוא ערך עצמי של A אזי λ^2 ערך עצמי של A^2.

כיוון שλ ע"ע של A קיים וקטור $v\neq 0$ כך ש $Av=\lambda v$.

לכן $A^2v=AAv=A\lambda v=\lambda Av=\lambda\lambda v=\lambda^2 v$

כלומר λ^2 הינו ע"ע של A^2.

ב. הוכיחו שאם $A^2=0$ אזי אפס הוא ערך עצמי של A, והוא הערך העצמי היחיד.

כיוון ש $A^2=0$ אזי המטריצה A אינה הפיכה ולכן 0 הוא ע"ע שלה.

כעת יהי λ ע"ע של A, לכן לפי סעיף א' λ^2 הינו ע"ע של $A^2=0$.

אבל הע"ע היחיד של מטריצה האפס הוא אפס, ולכן $\lambda^2=0$, ולכן $\lambda=0$.

ג. הוכיחו שאם $A^2=0$ וכן A לכסינה אזי $A=0$.

כיוון שהמטריצה לכסינה, היא דומה למטריצה אלכסונית שעל האלכסון שלה הע"ע.

כיוון שהע"ע היחיד הינו אפס, נובע ש $P^{-1}AP=0$. נכפול משמאל בP ומימין בהופכית שלה, ונקבל כי $A=P0P^{-1}=0$.

3. יהי תת מרחב וקטורי $W = span\{(1,2,1,0),(0,1,-2,1),(-2,4,0,2),(-2,3,2,1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

א. מצאו בסיס ל W וחשבו את $\dim W$.

נשים את הוקטורים בעמודות מטריצה, ונמצא בסיס למרחב העמודות של המטריצה הזו.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 8 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 18 & 18 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן שלושת העמודות הראשונות **<u>מהמטריצה המקורית</u>** מהוות בסיס למרחב העמודות (העמודות של המשתנים התלויים).

כלומר הבסיס לW הינו $\{(1,2,1,0),(0,1,-2,1),(-2,4,0,2)\}$ ולכן המימד של תת המרחב הינו 3.

ב. מצאו בסיס אורתונורמלי ל W.

נפעיל תהליך גרם-שמידט על הבסיס שמצאנו בסעיף א', ונשים לב כי שני הוקטורים הראשונים מאונכים זה לזה ולכן אין צורך לשנות אותם. כלומר

$$w_1 = (1,2,1,0)$$
$$w_2 = (0,1,-2,1)$$

והוקטור השלישי מתקבל מחיסור היטליו על קודמיו:

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2$$

כלומר

$$w_3 = (-2,4,0,2) - \frac{\langle(-2,4,0,2),(1,2,1,0)\rangle}{\langle(1,2,1,0),(1,2,1,0)\rangle}(1,2,1,0) - \frac{\langle(-2,4,0,2),(0,1,-2,1)\rangle}{\langle(0,1,-2,1),(0,1,-2,1)\rangle}(0,1,-2,1) =$$
$$= (-2,4,0,2) - \frac{6}{6}(1,2,1,0) - \frac{6}{6}(0,1,-2,1) = (-3,1,1,1)$$

קיבלנו בסיס אורתוגונלי $\{(1,2,1,0),(0,1,-2,1),(-3,1,1,1)\}$

ננרמל את הוקטורים על מנת לקבל בסיס אורתונורמלי $\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(0,1,-2,1), \frac{1}{\sqrt{12}}(-3,1,1,1)\right\}$

ג. האם $(-3,1,1,0) \in W$?

אם הוקטור שייך לתת המרחב, ניתן להציג אותו כצירוף לינארי של איברי הבסיס.

כיוון שבסעיף קודם מצאנו בסיס אורתונורמלי, אנחנו יודעים לחשב באופן מיידי את המקדמים של הצירוף הלינארי וצריך להתקיים כי:

$$
\begin{aligned}
(-3,1,1,0) = &\left\langle (-3,1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1,0) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1,0) \\
&+ \left\langle (-3,1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(0,1,-2,1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}}(0,1,-2,1) \\
&+ \left\langle (-3,1,1,0), \frac{1}{\sqrt{12}}(-3,1,1,1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{12}}(-3,1,1,1)
\end{aligned}
$$

אבל צד ימין יוצא $\left(-\frac{33}{12}, \frac{9}{12}, \frac{15}{12}, \frac{9}{12}\right)$ ולכן הוקטור אינו שייך לתת המרחב.

4. תהי המטריצה

$$
A = \begin{pmatrix}
 & & & & & 1 \\
 & & & & 2 & \\
 & & & \iddots & & \\
 & & n & & & \\
 & n & & & & \\
 & \iddots & & & & \\
2 & & & & & \\
1 & & & & &
\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}
$$

(לכל $j \neq 2n+1-i$ מתקיים ש $a_{ij}=0$).

א. חשבו את הדטרמיננטה $\det(A)$.

נבצע n החלפות שורות:

$$R_1 \leftrightarrow R_{2n}, R_2 \leftrightarrow R_{2n-1}, \ldots, R_n \leftrightarrow R_{n+1}$$

ונקבל מטריצה אלכסונית שהדטרמיננטה שלה היא מכפלת איברי האלכסון.

כיוון שכל החלפת שתי שורות כופלת את הדטרמיננטה במינוס אחד, נקבל סה"כ:

$$\det(A) = (-1)^n (n!)^2$$

ב. נניח $n=2$. מצאו מטריצות אלמנטריות (מטריצות פעולה) $E_1, E_2, \ldots, E_k$ כך ש $E_k \cdots E_2 E_1 \cdot A = I$.

נתון כי $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ראשית נדרג את המטריצה למטריצת היחידה:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כלומר החלפנו שורה ראשונה ורביעית, החלפנו שורה שנייה ושלישית, כפלנו שורה שנייה בחצי ושורה שלישית בחצי.

מטריצה הפעולה המתאימות לפעולות הללו מתקבלות מהפעלת פעולות השורה על מטריצת היחידה:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. יהי $n \geq 2$ ותהי מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש $rank(A)=1$ ותהי $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ההעתקה הלינארית המוגדרת ע"י $Tv = Av$.

א. מצאו את $\dim \operatorname{Im} T$ ואת $\dim \ker T$.

ראשית אנו יודעים שA היא המטריצה המייצגת של ההעתקה T ולכן $\ker(T) = N(A)$ וכן $\operatorname{Im}(T) = C(A)$.
לכן $dim\operatorname{Im}(T) = dimC(A) = 1$ (כי דרגת המטריצה היא 1), וכמו כן $dim\ker(T) = dimN(A) = n - 1$.

ב. הוכיחו ש 0 הינו ערך עצמי של A ומצאו את הריבוי הגאומטרי שלו.

כיוון שדרגת המטריצה אינה מלאה, המטריצה אינה הפיכה ולכן 0 הינו ע"ע שלה.
הריבוי הגאומטרי הוא מימד המרחב העצמי $dimV_0 = dimN(A) = n - 1$.

ג. הוכיחו שA אינה לכסינה אם ורק אם $\operatorname{Im} T \subseteq \ker T$.

ראשית כיוון שהריבוי האלגברי של 0 הוא $n - 1$ המטריצה לכסינה אם ורק אם יש ע"ע נוסף (רק כך יהיו n ו"ע בת"ל).

כעת נניח $\operatorname{Im}(T) \subseteq \ker(T)$ ונב"ש שA לכסינה. לכן קיים ע"ע נוסף, כלומר קיים $\lambda \neq 0$ וקיים $v \neq 0$ כך ש $Av = \lambda v$, ולכן $Tv = Av = \lambda v$.

כיוון שהתמונה מוכלת בגרעין נקבל כי $T(\lambda v) = 0$ ולכן $\lambda T(v) = 0$ ולכן $\lambda^2 v = 0$ בסתירה לכך ש$\lambda \neq 0$ וגם $v \neq 0$.

מצד שני, נניח שA אינה לכסינה, ולכן לא קיים ע"ע נוסף.
כיוון שמימד התמונה הוא 1, נובע כי קיים $v \neq 0$ כך ש $\operatorname{Im}(T) = span\{v\}$.
כעת נביט ב$T(v)$. מצד אחד כיוון שזה איבר בתמונה הוא חייב להיות צירוף לינארי של הוקטור שפורש את התמונה ולכן $T(v) = av$.
מצד שני, אם $a \neq 0$ נקבל כי $Tv = Av = av$ כלומר a הוא ע"ע שאינו אפס, בסתירה לכך שהמטריצה אינה לכסינה.
לכן $T(v) = 0$ ולכן $v \in \ker(T)$ ולכן $\operatorname{Im}(T) \subseteq \ker(T)$.